

## 【基盤研究(S)】

理工系(数物系科学)



### 研究課題名 非線形解析学と計算流体力学の協働による乱流の数学的理論の新展開

早稲田大学・理工学術院基幹理工学部・教授

こぞの 小菌  
ひでお 英雄

研究課題番号: 16H06339 研究者番号: 00195728

研究分野: 偏微分方程式論、非線形解析学

キーワード: ナビエ・ストークス方程式、調和解析学、関数解析学、大域的適切性、漸近解析

#### 【研究の背景・目的】

ナビエ・ストークス方程式は非線形特有の現象を引き出すことのできる典型的モデルとして、理論および実験両方の研究者から注目されてきた。毎年定期的に国際シンポジウムが開かれており、世界トップレベルの研究者達が未解決問題取り組んでいる。研究メンバー小菌、隠居は過去にそれぞれ日本数学会プロジェクトである MSJ-IRI 国際研究集会、RIMS プロジェクトの組織代表、副代表を務めた。ミレニアム7問題の1つである同方程式の「時間大域的可解性」は他の6つの問題と比較して純粋数学のみならず、計算科学、流体力学とも密接に関係していることが特徴である。一方、計算科学における直接数値シミュレーション(DNS)は乱流研究の有力な手段であるが、強い非線形性と巨大自由度をもつという乱流の本質的特長を反映するには困難であった。金田が芳松と推進している一様等方性乱流のDNSは従来とは桁違いの大型計算であり、これによって初めて大規模実験、あるいはそれを凌駕する高いレイノルズ数の乱流データが実験的誤差や不確定性なしに取れるようになった。

本研究の目的は、このような学問的な背景に基づき、非線形解析学と計算流体力学の手法を駆使して流動現象の本質である乱流の解明に挑戦することである。実際、無限大や極限操作といった数学解析固有の方法が大規模計算を不可欠な研究手段とする乱流現象の解明や従来数理的な裏付けの乏しかった乱流理論や乱流モデルの構築に新たな知見を与えることが期待できる。本研究では経験則や直感に過度に依存しない信頼性の高い乱流の数学的理論の確立、更には乱流の数理解モデルの開発を目指す。

#### 【研究の方法】

本研究は非線形解析研究班と流体力学研究班の連携によって推進する。非線形解析研究班では、非線形偏微分方程式の手法、特に調和解析学と関数解析学を用いてナビエ・ストークス方程式の解の性質を数学的厳密理論の観点から考察する。領域のサイズの影響やエネルギー減衰といった数値計算では扱えない無限大や極限操作を研究対象とし、大規模な流れを記述する適切なモデルの構築を行うと同時に乱流の普遍原理の解明に数学的な確証を与える。

流体力学研究班では、計算科学的方法、特に大規模直接数値シミュレーション(Direct Numerical Simulation)による乱流現象の解明、及び数理論の根拠を持ち、恣意的調節パラメータを含まない情報縮約手法の開発に挑戦する。

(I) 調和解析学、特異極限と有限性の影響評価

- ・無限領域における流れの解析
- ・乱流の大スケールの普遍性に対する計算領域サイズの影響評価

(II) 境界層の数理解析と粘性極限

- ・プラントル方程式の適切性・非適切性の研究
- ・時空間一様なナビエ・ストークス方程式の非粘性極限の導出
- ・エネルギー散逸率の下からの評価とオイラー方程式

式の解のエネルギー保存則の崩壊

- ・エネルギースペクトルとナビエ・ストークス方程式の弱解の正則性
- (III) 乱流のもつ普遍的法則性の解明
- ・固体壁を持つ乱流における普遍的統計法則
- ・乱流中のパッシブスカラー場の減衰則
- (IV) 情報縮約手法の開発 予測可能性と信頼性の評価
- ・乱流の非経験的 LES スペクトルモデルの開発
- ・乱流に対する秩序渦手法の開発

#### 【期待される成果と意義】

乱流の解明は単に流体力学の分野に留まらず、大気・気象、航空、エネルギー、防災等社会の諸問題の解決に大きく関わっている。大型計算機の発達により簡単化されたモデルの構築、小さなスケールの流れの解析がかなりの精度で実現されている。この様な状況下で、更に無限大や極限といった数学解析独自の手法を展開することにより、これまでの大規模計算科学による流体现象、特に大きなスケールの乱流の数学的理論の確立が期待される。また、本研究は数学解析の見地からはミレニアム問題の一つ「ナビエ・ストークス方程式の大きなデータに対する古典解の存在」に対して真正面から取り組むという挑戦的な試みである。ここで大きなデータとは、大きなレイノルズ数と同値であり、乱流の解明と密接に関わる。近年の著しい数理解析的手法およびコンピュータの進展によって、60年来の von Neumann の夢であった純粋数学と計算科学の協働による乱流解明の現実化が期待されている。

本研究班の実績である乱流 DNS の持つ自由度は非常に大きく、数値シミュレーションでは乱流研究分野に限らず、全科学分野を見渡しても例がない。それ故、本研究の非線形解析学と計算科学の手法による「流体力学理論の構築」は、乱流を典型とする非線形超巨大自由度力学系に対する数理解析の新しい応用分野の開拓にも貢献すると期待される。即ちナビエ・ストークス方程式を代表とする非線形偏微分方程式論、更に巨大自由度の非線形力学に変革をもたらす課題である。

#### 【当該研究課題と関連の深い論文・著書】

- ・小菌、非圧縮性ナビエ・ストークス方程式の定常・非定常流の調和解析的研究 数学 第67巻、113-132 (2015).
- ・Kozono, Amann, Giga et al., Recent Developments of Mathematical Fluid Mechanics, Birkhaeser-Verlag 2016.

#### 【研究期間と研究経費】

平成28年度-32年度 123,600千円

#### 【ホームページ等】

<http://www.math.sci.waseda.ac.jp/math/>