様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ３０ 年　 ８ 月 ２１ 日現在

機関番号：１２６０１
研究種目：研究活動スタート支援
研究期間：2016～2017
課題番号：１６Ｈ０６７１１

研究課題名（和文）多次元格子上の離散方程式における可積分性判定

研究課題名（英文）Detecting integrability of discrete equations on multi-dimensional lattices

研究代表者

間瀬　崇史（Mase, Takafumi）

東京大学・大学院数理科学研究科・特任助教

研究者番号：８０７８０１０５

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,300,000円

研究成果の概要（和文）：多次元格子上で定義された離散方程式の可積分性に関する研究を、方程式の各項の分子分母の因子の打消しという観点から行った。まず、互いに素条件と呼ばれる性質を適当に拡張し、より多くの方程式に適用できるようにした。さらに、拡張離散戸田方程式がこの性質を満たすことを示した。また、特異点閉じ込めから方程式の可積分性を判定するための手法の開発も行った。2階の方程式の場合に、代数幾何学的な手法を用いてその意味を明らかにした。

研究成果の概要（英文）：We studied the integrability of discrete equations on multi-dimensional lattices, by means of cancellation of factors. First, we extended the so-called coprimeness condition. As a result, it has become possible to apply the coprimeness condition to more equations than before. We also showed that the nonlinear form of an extended version of the discrete Toda equation possesses this property. Moreover, in the case of equations on one-dimensional lattices, we developed a method to verify the integrability only by means of singularity confinement. Using the theory of algebraic surfaces, we revealed the meaning of our method in the case of second-order mappings.

研究分野：数物系科学・数学

キーワード：可積分系　離散可積分系　代数的エントロピー

１．研究開始当初の背景

可積分性判定とは、具体的な方程式が与えられた際に、それが可積分となるか調べるための手法である。
離散系における可積分性判定として最初に提唱されたのは、特異点閉じ込めという手法である。特異点閉じ込めテストにおいては、方程式に生じた特異点(初期値の情報の喪失)が、その後の系の発展に伴って消えるのかどうかを調べる。特異点閉じ込めは非常に強力であるにも関わらず適用が容易であり、離散 Painlevé 方程式の構成など、数多くの成功を収めた。しかしその後、特異点閉じ込めテストを通過するにもかかわらず非可積分となる系(Hietarinta-Viallet 方程式)が発見された。現在では、特異点閉じ込めを通過するにも関わらず非可積分となる例が数多く知られており、方程式の次数増大(代数的エントロピー)を用いて方程式の可積分性を定義するのが主流となっている。しかし、具体的に与えられた方程式に対して、その代数的エントロピーを求めるような統一的手法は現在まで知られておらず、この点が離散系の可積分性判定における最大の問題となっている。
離散系における可積分性判定については、1次元格子上の方程式では数多くの研究結果が既にあるものの、多次元格子上の方程式では、これまであまり研究がされてこなかった。その主な原因として考えられるのは、例えばHietarinta-Viallet 方程式のように、可積分性判定に対して微妙な振る舞いをする具体例が、多次元では全く知られていなかったことである。しかし、本研究が開始する少し前に、適切な具体例が2次元の場合に本研究の代表者によって初めて構成されたことで、多次元格子上の方程式の可積分性判定を論ずる準備が整った。

２．研究の目的

本研究の目的は、多次元格子上で定義された離散方程式の可積分性判定法を開発することである。具体的には、方程式の各項を初期値の有理関数と見たときの、分子分母に登場する因子に注目する。互いに素条件やLaurent 性を持つ方程式への変換を用いて因子の打消しを調べることで、可積分性を判定する手法の開発を目指す。

３．研究の方法

本研究において用いる主な手法は以下の３つである。

(1)
特異点閉じ込めを通過する方程式が、特異点パターンに応じた変換によって Laurent 性を持つ方程式へと変換されるメカニズムを解明する。さらに、変換後に得られる方程式を、既約性や互いに素条件の観点から詳しく調べる。

(2)
多次元格子上の方程式から１次元格子上の方程式を得る、簡約(リダクション)という操作を行った際、リダクションの前後で方程式の性質がどの程度保たれるのかを調べる。Laurent 性が保たれることは既にわかっているので、特に互いに素条件が保たれるのかどうかに注目する。

(3)
特異点閉じ込めを通過する方程式の可積分性を、Laurent 性を持つ方程式への変換から得られる情報を用いて判定する手法を開発する。

４．研究成果

(1)
多次元格子上で定義された離散方程式を、各項を初期値の有理関数とみたときの分子・分母の因子の打ち消しという観点から調べた。特に詳しく調べた方程式は、2 次元離散戸田方程式と呼ばれる可積分方程式に適当な拡張を加えて非可積分としたものであり、用いた主な手法は、Laurent 性と互いに素条件である。
方程式のLaurent 性と互いに素条件を示すにあたって本研究以前に主に用いられてきた手法は、方程式の既約性という性質を用いるものであった。しかし、既約性が壊れている場合、特に方程式自体が既約でない Laurent 多項式で定義されているような場合であっても、これまでの議論を拡張することで互いに素条件を詳しく調べられることがわかった。
さらに、様々な方程式を調べた結果、より多くの方程式に適用するためには、Laurent 性と互いに素条件を拡張する必要があることもわかった。そこで、どのような拡張が適切なのかを調べ、実際にLaurent 性と互いに素条件を拡張した。

(2)
多次元格子上の方程式を１次元にリダクションし、その性質を調べた。特に詳しく調べたのは、互いに素条件を満たす多次元格子上の方程式をリダクションした場合に、互いに素条件が保たれるのかどうかと、リダクション後の代数的エントロピーがどのような値になるのかである。用いた手法は、Laurent 性を持つ方程式への変換を行い、因子の打消しを詳細に調べる方法である。

(3)
特異点閉じ込めを通過する１次元格子上の方程式について、特異点パターンの情報のみから方程式の代数的エントロピーを求めることで可積分性を判定する手法について研究した。数多くの具体例でこの手法が有効であることを確認したのち、2 階の方程式の場合に、代数幾何学的な手法を用いてその意味を明らかにした。高階の方程式や多次元格子上の方程式、あるいは特異点閉じ込めを通過しない方程式の場合に、これらの手法がどこまで有効であるかについては、今後の課題である。

(4)
2 次元格子上の方程式であって線形化が可能なものを新たに構成した。さらに、この方程式が Laurent 性、既約性、互いに素条件をすべて満たすことを示すとともに、この方程式のリダクションとして得られる方程式の次数増大が、すべて高々1 次関数的であることを示した。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　5　件）

(1)
R. Kamiya, M. Kanki, T. Mase and T. Tokihiro,
Two dimensional lattice equation as an extension of the Heideman-Hogan recurrence,
Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical,
51 (2018): 125203.
査読有.
doi: 10.1088/1751-8121/aaad47

(2)
A. Ramani, B. Grammaticos, R. Willox and T. Mase,
Calculating algebraic entropies: an express method,
Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical,
50 (2017): 185203.
査読有.
doi: 10.1088/1751-8121/aa66d7

(3)
R. Kamiya, M. Kanki, T. Mase and T. Tokihiro,
Coprimeness-preserving non-integrable extension to the two-dimensional discrete Toda lattice equation,
Journal of Mathematical Physics,
58 (2017): 012702.
査読有.
doi: 10.1063/1.4973744

(4)
R. Willox, T. Mase, A. Ramani and B. Grammaticos,
Full-deautonomisation of a lattice equation,
Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical,
49 (2016): 28LT01.
査読有.
doi: 10.1088/1751-8113/49/28/28LT01

(5)
M. Kanki, T. Mase and T. Tokihiro,
Singularity confinement and chaos in two-dimensional discrete systems,
Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical,
49 (2016): 23LT01.
査読有.
doi: 10.1088/1751-8113/49/23/23LT01

〔学会発表〕（計　5　件）

(1)
間瀬崇史, R. Willox, A. Ramani and B. Grammaticos,
特異点閉じ込めと代数的エントロピー I,
非線形波動研究の新潮流 -理論とその応用-,
九州大学応用力学研究所（福岡）,
2017 年 11 月.

(2)
T. Mase,
Spaces of initial conditions for nonautonomous mappings of the plane,
The Tenth IMACS International Conference on Nonlinear Evolution Equations and Wave Phenomena: Computation and Theory,
Georgia（アメリカ）,
2017 年 3 月.

(3)
間瀬崇史,
非自励 2 階差分方程式の初期値空間,
アクセサリー・パラメーター研究会 2017,
熊本大学理学部（熊本）,
2017 年 3 月.

(4)
T. Mase,
Spaces of initial conditions for nonautonomous mappings of the plane,
Workshop on Discrete Painlevé equations,
東京大学数理科学研究科（東京）,

2016 年 12 月.

(5)
<u>間瀬崇史</u>,
多次元格子上の擬似可積分系,
可積分系数理の現状と展望,
京都大学数理解析研究所（京都),
2016 年 9 月.

６．研究組織

(1)研究代表者

間瀬 崇史（MASE Takafumi）
東京大学・大学院数理科学研究科・特任助教
研究者番号： 80780105