様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ３０ 年　 ８ 月 ３０ 日現在

機関番号：１２６０１
研究種目：研究活動スタート支援
研究期間：2016～2017
課題番号：１６Ｈ０６７１２

研究課題名（和文）Inversion and prediction problems in anomalous diffusion

研究課題名（英文）Inversion and prediction problems in anomalous diffusion

研究代表者
李　志遠（Li, Zhiyuan）

東京大学・大学院数理科学研究科・特任研究員

研究者番号：００７８２４５０

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,000,000円

研究成果の概要（和文）：Caputo微分を持って拡散方程式について議論した．分数モデルと古典的モデルはいろいろな性質は違います.一意接続性について（ＵＣ）は何ですか？Theta関数とラプラス変換法によって,古典型の一意接続性を証明した.

また、端点での観測データによって，拡散方程式の分数階階数を決定する逆問題を考察した．初期値・境界値問題を解に関する積分方程式を利用し，Laplace変換とその逆変換により，分数階微分の階数は観測データにLipschitz連続依存することを証明した.

研究成果の概要（英文）：The diffusion equation with Caputo derivative was discussed. The Caputo derivative is inherently nonlocal in time with history dependence, which makes the crucial differences between fractional models and classical models. What about the unique continuation (UC)? There is not affirmative answer to this problem except for some special cases. By using Theta function method and Laplace transform argument, we gave a classical type unique continuation, say, the vanishment of a solution to a the fractional diffusion equation in an open subset implies its vanishment in the whole domain provided the solution vanishes on the whole boundary.
We also considered an inverse problem in determining the fractional order. By exploiting the integral equation of the solution u to the our problem, and carrying out the inversion Laplace transforms, we verified the Lipschitz continuous dependency of the fractional order with respect to the overposed data.

研究分野：偏微分方程式の逆問題

キーワード：拡散方程式　逆問題

１．研究開始当初の背景

不均質媒質における物質の拡散現象は，古典的な拡散方程式ではしばしば説明できないことが認識されるようになってきた．そのような拡散現象では，物質の濃度が時間とともに，指数関数のように速く減衰せず，濃度の空間分布がロング・テールとよばれるプロファイルを示すなどの点で，古典的な拡散と顕著に異なる特徴がある．そこで，そのような異常拡散の数学モデルの研究が重要になっている．古典的な拡散方程式に対応するミクロモデルは，ランダムウォークである．一方で，上記のような異常拡散に関するミクロモデルとして，連続時間ランダムウォーク（CTRW）がある．古典的な拡散方程式と類似の発想によって，CTRW から誘導されるマクロモデルとして，非整数階拡散方程式を考えることができ，これが異常拡散現象のよりよいモデルとして期待できるという認識が環境工学，地熱発電工学などの応用分野で拡がっている．

２．研究の目的

時間非整数階微分の線型結合を含む偏微分方程式に対して，初期値・境界値問題などの順問題や非整数階の微分の階数などを解の限定された情報から決定するという逆問題を考察した．

異なる階数の非整数階微分の線型結合を持つ拡散方程式を含めて，非整数階拡散方程式は以下のように定式化される：

$$\begin{cases} D_t^{\mu}u = -Au + F \ in \ \Omega\times(0,T), \\ u(x,0) = a \ in \ \Omega, \\ u(x,t) = 0 \ on \ \partial\Omega\times(0,T). \end{cases} \qquad (1)$$

但し Ω を R^d における有界領域で境界 $\partial\Omega$ は十分滑らかとし，A は 2 階の楕円型微分作用素であり.時間に関する非整数階数について積分をとった分布階数を持つ微分が次のように定義される

$$D_t^{\mu}u(t) = \int_0^1 \mu(\alpha)\partial_t^{\alpha}u(t)d\alpha,\ t>0.$$

ここで，μ は[0,1]上の非負の関数であり，∂_t^{α} は α 階の Caputo 微分を表す.

３．研究の方法

（**1**）まず、 通常の時間に関する１階の微分と非整数階微分に項が混在している場合を考える．すなわち，**(1)**で

$$\mu = \delta(\cdot-1) + \sum q_i(x,t)\delta(\cdot-\alpha_i)$$

$$1<\alpha_l<\cdots<\alpha_2<\alpha_1<\frac{1}{2}$$

とする.このような形の非整数階偏微分方程式は，例えば，地熱に関連して，**Suzuki** ら **(2015)**によって，亀裂などがある地下における熱流れのモデル式として提案されている．

一般に **Carleman** 評価は逆問題の数学解析のために有用でであり**,Carleman** 評価を用いて，境界データで解を決定する境界値問題の条件付き安定性を証明した．

（**2**）次に、時間に関して非整数階微分の項を１つしか含まないような拡散方程式は**,(1)**で $\mu=\delta(\cdot-\alpha)$，$0<\alpha<1$ 場合に相当する．そのような単項の非整数階微分を持つ拡散方程式に対して，**(1)**の初期値が未知のときに，ラプラ変換および楕円方程の **Unique continuation** によって、$\omega\subset\Omega$ を任意の部分領域として，$u_{\omega\times(0,T)}=0$ ならば $\Omega\times(0,T)$ で **u=0** となる解の一意性を証明した．

注：一次元の場合、**Theta** 関数とラプラス変換法によって**,**古典型の一意接続性を証明した．

（**3**）また、分数階微分を持つ線形拡散方程式に対して，逆問題を考察した： 定数 α は未知の場合に，端点での観測データ $u(0,t_0)$ によって，**(1)**の階数 α を決定する逆問題を考察した．初期値・境界値問題を解 **u** に関する積分方程式を利用し，**Laplace** 変換とその逆変換により，**(1)**の分数階微分の階数は観測データに **Lipschitz** 連続依存することを証明した．

４．研究成果

第　１年度

（**1**）まず，通常の時間に関する１階の微分と非整数階微分に項が混在している場合を考える.このような方程式に対して **Carleman** 評価を確立することができた．

定理 **1** $\zeta\in C^2(\overline{\Omega})$ が $\nabla\zeta\neq0$ であって，

$$\varphi := \exp(\lambda(\zeta(x)-\beta t^{2-2\alpha_1}))$$

とし，

$$L_0 = \partial_t - \sum_{i,j=1}^{n}\partial_i(a_{ij}(x,t)\partial_j)$$

とおく．

更に，$\Sigma_0=\overline{\Omega}\times\{0\}$ と $D\subset\Omega\times(0,T)$ が有界の領域とし，D の境界線 ∂D は有限個の滑らかな境界の合併とする．この時，ある定数 λ_0 が存在して，任意の $\lambda\geq\lambda_0$ に対して，$s_0(\lambda)$ が選択でき，次が成立する：

$$\int_D \frac{1}{s\varphi}\left(|\partial_t u|^2 + s\lambda\varphi|\nabla u|^2 + s^3\lambda^4\varphi^3 u^2\right)e^{2s\varphi}dxdt$$
$$\le C\int_D |L_0 u|^2 e^{2s\varphi}dxdt$$
$$+e^{C(\lambda)s}\int_{\partial D}\left(|\nabla u|^2 + u^2\right)e^{2s\varphi}dSdt$$
$$+e^{C(\lambda)s}\int_{\partial D \setminus \Sigma_0}|\partial_t u|^2 e^{2s\varphi}dSdt,\ \ s > s_{0.}$$

ただし，定数C>0は$\lambda_0, s_0$$及び係数によって決まり，$u \in H^{2,1}(\Omega)$である．

（2）一般にCarleman評価は逆問題の数学解析のために有用でであり，ここで確立されたCarleman評価を用いて，境界データで解を決定する境界値問題の条件付き安定性を証明した：

定理 2 Γは$\partial\Omega$の任意の空でない部分境界とし，$\Omega_0 \subset \Omega \bigcup \Gamma$ が $\Omega_0 \ne 0$ と $\partial\Omega_0 \bigcap \partial\Omega \subset \Gamma$ であるとする．この時，ある定数 C>0 と$\theta \in (0,1)$が存在して，次が成立する

$$\| u \|_{H^{1,1}(\Omega_0\times(0,\varepsilon))} \le C \| u \|^{1-\theta}_{H^{1,1}(\Omega\times(0,T))} \overline{F}^{\theta}.$$

ただし，uを（2）の解，$\varepsilon > 0$，

$$\overline{F} = \| u(\cdot,0) \|_{L^2(\Omega)} + \| F \|_{L^2(Q)}$$
$$+ \| u \|_{H^1(\Gamma\times(0,T))} + \| \partial_\nu u \|_{L^2(\Gamma\times(0,T))}$$

とする．

第 2年度
（1）時間に関して非整数階微分の項を１つしか含まないような拡散方程式を持つ拡散方程式に対して，まず，（1）の初期値が未知のときに，解の一意性を証明した．これは境界条件を仮定している意味で，偏微分方程式の解の通常の一意接続性よりも弱い性質であり，以下のように述べることができる．

定理3 $0 < \alpha < 1$，F=0とする．さらに，

$$u \in C([0,T]; L^2(\Omega))$$

$$u \in C((0,T]; H^{2\gamma}(\Omega) \bigcap H_0^1(\Omega)),\ \gamma \in (0,1/2)$$
u を（1）の解とする．この時，

$$u_{\omega\times(0,T)} = 0 \Rightarrow u_{\Omega\times(0,T)} = 0$$

注：一次元の場合、Theta 関数とラプラス変換法によって，古典型の一意接続性を証明した．

（2）分数階微分を持つ線形拡散方程式

$$\begin{cases} \partial_t^\alpha u - \partial_x^2 u = 0\ in\ (0,1)\times(0,T), \\ u(x,0) = a\ in\ (0,1), \\ \partial_x u(0,t) = g(t)\ in\ (0,T), \\ \partial_x u(1,t) = f(u(1,t))\ in\ (0,T), \end{cases} \quad (2)$$

に対して，初期値・境界値問題などや逆問題を考察した．但しfは非正のLipschitz連続関数である．

第一，定数αと関数 f は未知の場合，まず，Mittag-Leffler 関数及び Theta-関数を用いて，初期値・境界値問題を解uに関する積分方程式を得る．この積分方程式を利用して，一つ端点での観測データ u(0,t)から，分数階微分の階数αと未知境界条件fを決定する逆問題における一意性を証明した．すなわち，$\alpha, \beta \subset [\alpha_0, \alpha_1] \subset (0,1)$ と f_1, f_2 に関する初期値・境界値問題（2）の解とする．観測データ$u(0,t) = u(0,t)$によって，

$$\alpha = \beta,\ \ f_1 = f_2$$

を示した．

第二，定数αは未知の場合に，端点での観測データ u(0,t_0)によって，（2）の 階数αを決定する逆問題を考察した．初期値・境界値問題を解uに関する積分方程式を利用し，Laplace変換とその逆変換により，（2）の分数階微分の階数は観測データにLipschitz 連続依存することを証明した．すなわち，0<t_0<T を任意に与え，u_α, u_βを$\alpha, \beta \subset [\alpha_0, \alpha_1] \subset (0,1)$に関する初期値・境界値問題（2）の解とする．

$$|\alpha - \beta| \le C | u_\alpha(0,t_0) - u_\beta(0,t_0) |$$

を示した． 但し，t_0は十分小さいの定数．定数C>0は$\alpha_0, \alpha_1, t_0, a, \Omega$によって決まる定数である．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 2 件）

① Z. Li, Y. Luchko and M. Yamamoto, **Analyticity of solutions to a distributed order time-fractional diffusion equation and its application to an inverse problem, Computers & Mathematics with Applications,** 査読有, **73巻,2017, 1041-1052. DOI:https://doi.org/10.1016/j.camwa.2016.06.030**
② D. Jiang, Z. Li, Y. Liu and M. Yamamoto, **Weak unique continuation property and a related inverse source problem for time-fractional diffusion-advection**

equations, Inverse Problems, 査読有, **33** 巻**, 2017, 055013.**
http://iopscience.iop.org/article/10.1088/1361-6420/aa58d1/pdf

〔学会発表〕（計　8　件）

① A survey on weak unique continuation for the time-fractional diffusion equations, Shandong University of Technology, Zibo, China, 2016 年 10 月.
② Forward and inverse problems for the time-fractional diffusion equations, Shandong University of Technology, Zibo, China, 2016 年 10 月.
③ Carleman estimates for the time-fractional diffusion equations and applications, 偏微分方程式の逆問題とその周辺, 京都大学数理解析研究所, 2017 年 1 月.
④ A survey on inverse problems for time-fractional diffusion equations, Hohai University, Nanjing, China, invited by Dr. Xing CHENG, 2017 年 3 月.
⑤ Mathematical analysis for diffusion equations with generalized fractional time derivatives, University of Science and Technology of China, Hefei, China, invited by Prof. Shumin LI, 2017 年 4 月.
⑥ An inverse problem for distributed order time-fractional diffusion equations, Applied Inverse Problems 2017, Zhejiang University, Hangzhou, China, 2017 年 6 月.
⑦ Inversion for orders of fractional derivatives of diffusion equation, 偏微分方程式の逆問題とその周辺, 京都大学数理解析研究所, 2018 年 1 月.
⑧ Unique Continuation Principle for The Time-fractional Diffusion Equation, IPMI2018, The University of Tokyo, 2018 年 2 月.

６．研究組織
(1)研究代表者
李志遠　（ **LI, Zhiyuan** ）
東京大学・大学院数理科学研究科・特任研究員
研究者番号：**00782450**

(4)研究協力者
山本昌宏（**YAMAMOTO, Masahiro** ）
東京大学・大学院数理科学研究科・教授

LUCHKO Yuri (LUCHKO Yuri)
Beuth Technical University of Applied Sciences Berlin・教授

蒋代军 **(JIANG Daijun)**
華中师范大学・数学統計学院・準教授

劉逸侃 **(LIU Yikan)**
東京大学・大学院数理科学研究科・助教