

機関番号：13501

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2016～2017

課題番号：16H06834

研究課題名(和文) 中学校数学における文字式の学習指導に関する研究

研究課題名(英文) A Study on Understanding of Literal Expressions of Students in Junior High School Mathematics

研究代表者

清水 宏幸 (SHIMIZU, Hiroyuki)

山梨大学・大学院総合研究部・准教授

研究者番号：80562446

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,500,000円

研究成果の概要(和文)：本研究の目的は、生徒の方程式を立式する場面で用いる文字式の理解に関する困難性を顕在化させ、その困難性を克服するための学習指導を提案することにある。本研究では、全国学力・学習状況調査において出題された問題の中で、特に正答率の低かった過不足の問題に焦点を当て研究を進めた。本研究は、公立中学校2校の3年生を対象に質問紙調査とインタビュー調査を実施し、過不足の問題において方程式を立式できない生徒の文字式の理解の様相をまとめた。そこでは、問題文の言葉を置き換えている物としての文字、数値の意味をもとに数値を置き換えている物としての文字、物そのものを置き換えている文字の3つの様相が顕在化した。

研究成果の概要(英文)：This study aims to clarify the difficulty of students' understanding of algebraic expressions used in scenes of students' equations and propose learning and teaching to overcome the difficulty. Among the problems that were asked in the National Academic Assessment, we focused on the problem of distributing origami to students, where the correct answer rate was low. In this study, we conducted a questionnaire survey and interview survey for 1st to 3rd grade students at two public junior high schools and summarized the understanding of algebraic expressions of the students who can not formulate the equation in the problem. As a result, the following three aspects were revealed. (1) letter as object replacing the word of the problem sentence, (2) letter as object replacing the numerical value based on the meaning of the numerical value, and (3) letter replacing the object itself.

研究分野：数学科教育

キーワード：文字式の理解 方程式の立式 中学校数学

1. 研究開始当初の背景

方程式を使いこなせるようになることは中学校の数学を学習する上で重要なことであると考えられる。三輪(1991)は、方程式・不等式の利用について、方程式・不等式は、その意味を知り、解くことができるようにすることだけでなく、それを用いること、つまり、応用して問題を解決することが重要視されているといえると述べている。そして、利用は右の図式のように捉えるのが適当であるとし、この図にある「作る」「解く」「検討・吟味」の3つの相の中で最も困難なのは、問題から方程式・不等式を作ることであると述べている。そして、方程式を作る際には、文字の意味や数量の関係を理解することが必要となる。これら方程式に関する理解の困難性を解消することは、指導上の問題点であるといえると述べている。

生徒の方程式の理解を見ていく上で、生徒が与える文字の意味と等号の意味について考察する必要がある。三輪(1996)は、「表す過程は、フレーズ型の式に表すことと、センテンス型の式に表すこととかなり違いがある。後者は前者の基礎の上になされる。」と述べており、前者について「式の中の文字の意味」を取り上げている。また、後者については、「相等関係の分析」をその1つとして取り上げ、「相等関係は、対称的、推移的である。これは意識されないで使われたことが多い。」と述べている。

文字の意味に関してのこれまでの研究では、イギリスのHartを代表者とするCSMSの研究グループが行った研究が代表的である。この研究においてKüchemann(1981)は、文字に対して子どもが与える意味は6つあると述べており、未知数としての文字、一般の数を表す文字、変数としての文字以外にも、数値化された文字、使われない文字、対象(もの)としての文字という数学本来の文字の意味ではない使用が認められたと述べている。

方程式の立式の際の困難性として、文字を用いて式に表すことが挙げられる。Esty & Teppo(1996)は、 x のような文字を使う必要がない問題と x を使って方程式を作って解く問題の2つの文章問題の解法を比較し、方程式を立式するには、算術的思考から代数的思考への移行が必要で、その思考の焦点が、数から、数と数の演算、数の間の関係に移行することが必要であり、それには困難を伴うことを指摘している。

また、別の研究における立式の困難性として、「学生・教授」問題での誤りが挙げられる。「学生・教授」問題とは、「この大学には、教授の6倍の学生がいる。Pを教授の数、Sを学生の数としてこの関係を式に表しなさい。」である。この問題の典型的な誤りは、 $P = 6S$ である。正答は、 $P = S / 6$ 、あるいは $S = 6P$ であるので、正答の式と逆になっていることからリバースエラーと呼ばれている。この「学生・教授」問題の研究は、

Clement(1982)に代表され、同一の問題で各国において調査が行われ、様々な議論が起きている。日本では、久米ら(1990)が大学生を対象に調査を行い、結果を考察している。藤井(1998)は、「学生・教授」問題の困難性を再考し、学生と教授のそれぞれ個々の数量を理解し表すことは容易であるが、この数量を等号で結ぶことが困難なのであると指摘している。また、「等式としての立式は比例関係にある2量の場合において特に困難なのではないだろうか。この困難性が「学生・教授問題」に顕在化しているのではないだろうか。」と述べている。

さらに、数量を等号で結ぶことの困難性を指摘しているのが、MacGregor & Stacey(1996)である。彼らは、例えば、「ボーイスカウトのグループは、ある長い週末に3日間の強歩をしました。日曜日は、土曜日に歩いた距離よりも7 km遠くまで歩きました。月曜日には土曜日に歩いた距離よりも13 km遠くまで歩きました。合計の旅は、80 kmでした。土曜日はどれだけ歩いたのでしょうか?」という問題に、大概の生徒は、数量を文字におくことや1つの変数でいくつかの数量、例えば、 $x, x + 7, x + 13$ などを表すことはできたが、関係を記述すること、つまり、 $x + (x + 7) + (x + 13) = 80$ という等式を作ることが困難であったという結果を示している。この2人の研究は、前述の「学生・教授」問題に限らず文章題を等式として立式することの困難性に着眼している。

2. 研究の目的

中学校数学において、文字式は、図形の論証とともに、学習指導の問題点が大きい内容である。私は、これまで中学校数学の教員として授業の中で、生徒たちの文字式に対する多くのつまづきや誤りを見てきた。そのつまづきや誤りのうち、時間が経つにつれて解消していくものなのか、それとも指導が必要なものなのかは、いまだはっきりと区別が付いていない。また、その学習の途中に現れるつまづきや誤りに対してどのような指導を行えば有効かについても明確になっていない。そこで、本研究の目的は、文字式を活用する場面である方程式の学習指導に焦点を当て、特に、生徒の方程式の理解に関する困難性を顕在化させ、その困難性を克服するための学習指導を提案することにある。

3. 研究の方法

本研究においては、全国学力・学習状況調査から生徒の課題点の洗い出し、先行研究から本研究の位置付けの明確化、実態調査のための調査問題の開発、パイロット調査、実態調査(質問紙調査)、質問紙調査から選んだ生徒を対象にインタビュー調査、生徒の発話の分析、発話の分析により生徒の文字式の理解の困難性の顕在化、課題明

確化 指導への示唆 成果と課題のまとめというサイクルで研究を進めている。本科の助成期間である平成28年度から平成29年度では、平成27年に行った実態調査の分析・まとめと新たな調査の実施と分析を行っている。

4. 研究成果

(1) 実態調査 質問紙調査

⑦ 対象：山梨県内公立A中学校3年生 115名，B中学校3年生 91名，合計 206名

⑧ 実施時期：平成27年7月中旬

⑨ 方法：A4 1枚の問題用紙からなる筆記形式の質問紙調査を通常の数学科の授業時間内の30分間を利用し，当該校の担当教諭により実施した。

⑩ 調査問題：以下の問題1である。

問題1
ひろしさんは，次のような問題を考えています。

問題
折り紙を何人かの生徒に配るのに，1人に3枚ずつ配ると20枚余ります。また，1人に5枚ずつ配ると2枚たりません。
生徒の人数と折り紙の総数を求めなさい。

ひろしさんは，この問題を見て次のように考えました。
ひろしさんの考え
この問題を解くために，どうやって式をつくれればよいかわからない。だから，問題を解くことはできない。
(1) この考えにあなたは賛成ですか，反対ですか。
どちらかに をつけなさい。賛成・反対
また，そのように考えた理由を書いてください。
(2) あなただったらこの問題をどう解きますか。解く過程を丁寧に書き，答えを求めてください。

⑪ 調査問題について

問題は，全国調査と同一の場面であるが，そのまま立式を問うのではなく，(1)で「この問題を解くために，どうやって式をつくれればよいかわからない。だから，問題を解くことはできない。」というひろしさんの考えを提示し，これに対しての意思表示と理由を記述させる。

この問題は，1次方程式，連立方程式どちらでも立式はできるので，(2)で「あなただったらこの問題をどう解きますか。」と問い，自分のできる方法で自由に解くことを求めた。このように問うことで文字や文字式の理解の様相を顕在化することを意図している。

⑫ 質問紙調査結果

問題場面から立式するところまでを考察の対象として生徒の解答状況を見ていくことにする。本調査を全国調査で示されている解答類型に当てはめて集計すると，結果は表2の

通りである。

表2：本調査と平成20年度A3(2)の反応率

番号	解答類型	本調査反応率 (%)	平成20年度反応率 (%)
1	$3x + 20 = 5x - 2$ または， $\begin{cases} y = 3x + 20 \\ y = 5x - 2 \end{cases}$ と解答しているもの	73.3	60.5
	$3x - 20 = 5x + 2$ または， $\begin{cases} y = 3x - 20 \\ y = 5x + 2 \end{cases}$ と解答しているもの	0	4.1
3	$\begin{cases} \square \\ \square \end{cases} x + 20 = \begin{cases} \square \\ \square \end{cases} x - 2$ または， $\begin{cases} y = \begin{cases} \square \\ \square \\ \square \end{cases} x + 20 \\ y = \begin{cases} \square \\ \square \\ \square \end{cases} x - 2 \end{cases}$ と解答しているもの	1.4	0.2
4	上記以外の一元一次方程式を解答しているもの	1.4	4.7
9	上記以外の解答	13.6	12.1
0	無解答	10.2	18.5

本研究の調査でも類型2～4の解答類型に該当する生徒はほとんどいないことがわかる。

インタビュー調査の対象・方法

⑬ 対象：本研究では上述の解答類型に基づいて，以下の誤答タイプの解答をした生徒15人を選び，一人ずつインタビュー調査を行った。これら生徒の質問紙調査の解答状況は，次のような内訳である。

表3：インタビュー対象生徒

解答類型	生徒 (イニシャル)
類型3	M.M, S.Y
類型4	S.S
類型9	⑦言葉や数値の計算だけで文字式を作っていない A.T, Y.O
	⑧文字式を作っているが誤っている R.I, M.W, A.K, S.H
類型0	K.T, H.S, M.Ta, T.K, M.Ts, M.Y

⑭ 方法：インタビュー調査は，次の(a)～(c)の手順で行った。

(a) 質問紙調査と同一の問題1を提示し読ませる。

(b) ひろしさんの意見に対して賛成，反対の理由を記述してもらい，それについて詳しく聞く。

(c) 問題をもう一度その場で解いてもらう。そのときに考えたことを説明させる。 $3x + 20$ と $5x - 2$ がどのような意味を表しているのかを問う。

インタビューの様子は全て録画する。

⑦ 本稿で分析する対象生徒

過不足の問題の立式を誤答している生徒の文字や文字式の理解を顕在化することを目的としているため、インタビューを行った15名のうち文字を用いて式をつくることのできた生徒に焦点を当てる。本稿では、T.K, A.K, S.Hの3名のインタビューのプロトコルを分析し、文字や文字式の理解についての様相を探った。

⑧ 3名のプロトコルの分析から

(a) 問題文に沿って、言葉に数や文字 x, y を当てはめて立式(生徒 T.K)

「一人を y にして」という発言に象徴されるように文字 x, y を言葉の置き換えとして使っている。

T.Kは次のように立式している。

1人に3枚ずつ配ると20枚余ります。
$y = 3x + 20$

この生徒は、 y は生徒の人数、 x は一人に配った枚数であると発言している。人数、枚数と答えているが、数量を表していると思えず、一貫して言葉を文字や数に置き換えている様子がある。このとき、文字を物として理解し使っていると考えられる。なぜなら、何を y にしているのかとたずねられると「一人に y 」から「生徒の人数」と解釈し直しており、一人の生徒を y と捉えていると考えられるからである。

(b) $3x + 20$ と $5x - 2$ を操作として捉えて立式(生徒 A.K)

この生徒は、 $3x + 20$ と $5x - 2$ を縦に並べて書いた後、しばらく考え込んでいる。そして、質問者が $3x + 20$ が何を表すかをたずねると、「3枚ずつ1人に配ると、20枚余る」と問題文のままを答えている。この生徒は、問題文に書かれている操作から、 $3x + 20$ と $5x - 2$ をつくったと考えられる。しかし、この2つを等号で結ぶところまではいかなかった。そして、 $3x$ は何を表しているかをたずねると、「3枚ずつ配った人数」(62枚)と答えている。このとき、A.Kは手で何かを配るジェスチャーをしながら答えている。この様子から、折り紙を生徒に配る操作をイメージしながら式 $3x$ を3枚ずつ配った人数と答えたとみられる。したがって、 $3x + 20$ を $3x$ は人数、20は枚数と別々の数量であると解釈し、1つの数量を表していると思えていなかったと考えられる。

(c) 折り紙の総数 62 を文字に置きかえて立式(生徒 S.H)

この生徒は、インタビューの最初、提示された問題には手が止まって、何も書いていない。そこで、新たな問題として折り紙の全部の枚数が62枚であることがわかっている下の問題2を提示した。

問題2「折り紙が全部で62枚あります。生徒一人に4枚ずつ配ったら、10枚余りました。生徒の人数を求めなさい。」

この問題に対して、S.Hは、すぐに図3のように式をつくり解くことができた。その後、再度、最初の問題に戻って考えさ

$4x + 10 = 62$
$4x = 52$
$x = 13$

図1: S.Hの記述1

せた。S.Hはこのとき図3の式と本問題を何度も見比べている。そして、「 $x =$ 」と書いてしばらく考え込む。再び問題2で自分が書いた

$x = 37 + 20$	
$x = 57 - 2$	
$x - 37 = 20$	$x = 20 + 37$
$-) x - 57 = -2$	$x = 53$
$27 = 22$	
$7 = 11$	$x = 53 \text{枚} = 11人$

図2: S.Hの記述2

式と見比べながら式を2つ作り、図4のように解いた。このとき、折り紙の総数を x として左辺に固定しているのである。このとき、左辺においた x は、折り紙の総数を表している62という数の置き換えとして用いていると考えられる。これは、37Sで問題2は折り紙の総数が62枚とわかっていたが、本問題は折り紙の総数がわからなかったから、それを x とおいたと発言していることからわかる。このときの文字 x は、未知数や変数として使っているのではなく、単に数値を x に置き換えたと考えられる。つまり、問題文から折り紙の総数を未知数と捉えて文字を使ったのではなく、62が折り紙の総数を表していると認識したことからそれを x に置き換えたと考えられる。何度も図4でつくった式をながめることによってそのようにみることができたと考えられる。この生徒の様相は、1つの数値を単に文字に置き換えをしただけであるので、文字を物として理解していると考えられる。しかし、1つの数を、一般性を持っている数、つまり変数となり得る数であるとみて文字へ置き換えをするという見方へ進展する可能性のある一歩手前の段階であると考えられる。

(2) 考察

インタビュー調査の生徒の発言から、問題文に書かれている言葉を順に数や文字に置きかえて立式している生徒、 $3x + 20$ と $5x - 2$ を、折り紙を生徒に配るという操作としてみている生徒、そして、数値では理解されている折り紙の枚数を文字に置き換えて考えることによって方程式を立式できた生徒がいることが明らかとなった。

この3名の文字式の理解から、いずれも文字を数量としてみているのではなく、物としてみている様子が浮かび上がっている。それは一律に同じように物として見ているのではなく、それぞれの見方は異なっている。つまり、物としての文字の見方にいくつかの相があると考えられる。

本研究で実施した質問紙調査における生

徒の本研究の目的は、過不足の問題の立式に焦点を当て、生徒の文字や文字式の理解の様相を顕在化することであった。このことを探るため、調査問題を開発し質問紙調査とインタビュー調査を実施した。方程式をつくることができている生徒を対象にしたインタビュー調査において、 $3x+20$ と $5x-2$ の意味をたずねると、2つの文字式が何を表すかが曖昧になっていることがわかり、背後には、この文字式に含まれている文字を物として捉えている生徒の実態が浮かび上がってきた。さらに、その物としての文字の理解にいくつかの相があることが明らかとなった。物としての文字の理解については Küchemann(1981)によって提案されている。Küchemannの主張している物としての文字は、物を簡略化した記号、あるいは、物そのものの記号であると捉えられているとされている。文字 a, x がアルファベットを使っているため、日常言語との混同がみられる英語圏に多く現れていると考えられる。本稿では、Küchemannが提案している物としての文字以外の理解があることが明らかとなった。それは、次の3つである。

④問題文の言葉を置き換えている物としての文字

⑤数値を置き換えている物としての文字

⑥物そのものを置き換えた文字

このような文字の理解をしているため、文字式、例えば、 $3x+20$ を、「3枚ずつ1人に配ると20枚余る」を表しているといったように操作として捉えていたり、 $3x$ は人数を表し20は枚数を表すといったように別々の数量を表す式と捉えていたり、生徒の人数 x を使った式は生徒の人数を表すと捉えたりすると考えられる。

質問紙調査の解答状況を見ると、このような理解は、方程式をつくることができている生徒だけでなく、方程式を正しく立式している生徒の中にも現れていることが明らかとなった。

記述をこの観点で分析してみると、 $3x+20$ と $5x-2$ を正しく立式している生徒の中にも上で挙げたような文字の理解をしていると考えられる生徒がいることがわかった。

(3)結論

本研究の目的は、過不足の問題の立式に焦点を当て、生徒の文字や文字式の理解の様相を顕在化することであった。このことを探るため、調査問題を開発し質問紙調査とインタビュー調査を実施した。方程式をつくることができている生徒を対象にしたインタビュー調査において、 $3x+20$ と $5x-2$ の意味をたずねると、2つの文字式が何を表すかが曖昧になっていることがわかり、背後には、この文字式に含まれている文字を物として捉えている生徒の実態が浮かび上がってきた。さらに、その物としての文字の理解にいくつかの相があることが明らかとなった。物

としての文字の理解については

Küchemann(1981)によって提案されている。Küchemannの主張している物としての文字は、物を簡略化した記号、あるいは、物そのものの記号であると捉えられているとされている。文字 a, x がアルファベットを使っているため、日常言語との混同がみられる英語圏に多く現れていると考えられる。本稿では、Küchemannが提案している物としての文字以外の理解があることが明らかとなった。それは、次の3つである。

④問題文の言葉を置き換えている物としての文字

⑤数値を置き換えている物としての文字

⑥物そのものを置き換えた文字

このような文字の理解をしているため、文字式、例えば、 $3x+20$ を、「3枚ずつ1人に配ると20枚余る」を表しているといったように操作として捉えていたり、 $3x$ は人数を表し20は枚数を表すといったように別々の数量を表す式と捉えていたり、生徒の人数 x を使った式は生徒の人数を表すと捉えたりすると考えられる。

質問紙調査の解答状況を見ると、このような理解は、方程式をつくることができている生徒だけでなく、方程式を正しく立式している生徒の中にも現れていることが明らかとなった。

(4)継続研究

本研究で方程式を正しく立式している生徒の中にも物として文字を捉えている生徒の存在が明らかとなった。そこで、平成29年11月に新たに質問紙調査、インタビュー調査を実施した。この結果の分析は今後、日本数学教育学会誌で投稿を予定している。

<引用・参考文献>

Esty, W & Teppo, A. Algebraic thinking, language, and word problem. *Communication in Mathematics, K-12 and Beyond*, Yearbook NCTM, 1996, pp.45-53.

藤井齊亮, 児童・生徒の文字の理解とミスコンセプションに関するインタビュー調査. 数学教育学論究, 臨時増刊, 74. Vol.58, 1992, pp.3-27.

藤井齊亮, 学校数学における文字の理解について: 「学生・教授問題」再考. 山梨大学教育人間科学部研究報告, 49, 1998, pp.31-38

Kieran, C. The learning and teaching of school algebra. Douglas A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp.390-419). A Project of the National Council of Teachers of Mathematics, 1992, New York: Macmillan.

小岩大, 学校数学における変数の理解に関する研究 - 文字式の大小比較問題の解決に焦点を当てて -. 東京学芸大学博士論文, 2016.

国立教育政策研究所, 全国学力・学習状況調査. 中学校報告書, 2008.

- 国立教育政策研究所,全国学力・学習状況調査.
中学校報告書, 2009.
- Küchemann,D. Children's understanding of numerical variables.*Mathematics in School*,7(4), 1978a,pp.23-26.
- Küchemann,D. Children's understanding of numerical variables.*Mathematics in School*,7(5), 1978b,p.12.
- Küchemann,D. Algebra, Hart,K.M(Ed.),
Children's Understanding of Mathematics, 11-16, 1981,pp.102-119,London:John Murray.
- MacGregor,M & Stacey,K..Cognitive models underlying students'formation of simple linear equations. *Journal for Research in Mathematics Education*,24(3),1993,pp.217-232.
- MacGregor,M & Stacey,K. Origins of students' interpretations of algebraic notation.*Proceeding of the 20th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Valencia, Spain*,Vol.3,1996,pp.297-304.
- 三輪辰郎,式の指導内容の概観と問題点の考察.新・中学校数学指導実例講座,数・式, 1991,pp.39-74,金子書房.
- 三輪辰郎.文字式の指導序説.筑波数学教育研究,15,1996,pp.1-14.
- Sfard,A. The gains and the pitfalls and reification - The case of algebra. *Educational Studies in Mathematics* 26,1994,pp.191-228.

5 . 主な発表論文等

〔雑誌論文〕(計1件)

清水宏幸,中学校数学における文字式
の理解に関する研究-過不足の問題の
立式に焦点を当てて-,日本数学教育
学会誌数学教育論究,査読有,第99
巻臨時増刊,2017,17-24

〔学会発表〕(計3件)

清水宏幸,日本数学教育学会第50
回秋期研究大会(愛知教育大学)中
学校数学における文字式の理解に
関する研究-過不足の問題の立式
に焦点を当てて-,平成29年11
月5日

清水宏幸,日本数学教育学会第49
回秋期研究大会(弘前大学)中
学校数学における文字式の理解に
関する研究-過不足の問題の立式
に焦点を当てて-,平成28年10
月30日

清水宏幸,日本数学教育学会第4
回春期研究大会(埼玉大学)問題
解決のために構想を立て実践し,
評価・改善する力の育成-全国
学力・学習状況調査における
評価・改善する力を測る問題に
焦点を当てて-,平成28年6
月12日

〔図書〕(計0件)

6 . 研究組織

(1)研究代表者

清水 宏幸 (SHIMIZU, Hiroyuki)
山梨大学・大学院総合研究部・准教授
研究者番号: 80562446