様　式　C－19、F－19－1、Z－19　(共通)

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 30 年　 6 月 26 日現在

機関番号：32689
研究種目：研究活動スタート支援
研究期間：2016～2017
課題番号：16H07289

研究課題名（和文）構成的数学・計算可能数学・逆数学の接合点：存在定理の解の計算とその証明

研究課題名（英文）Uniform computability verified in a mathematically strong system and semi-intuitionistic provability for existence sentences

研究代表者
藤原　誠（Fujiwara, Makoto）
早稲田大学・高等研究所・助教
研究者番号：20779095

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　1,700,000円

研究成果の概要（和文）：存在定理「条件を満たす全てのXに対して，条件を満たす解Yが存在する」の解の一様計算可能性の一つの形式化として「XからYを計算する原始再帰的な一様計算手続きが存在し，それが解を与えることが算術的内包公理を含む古典高階算術体系で証明できる」という概念を考え，比較的単純な論理式として形式化される全ての存在定理に対して，上記の意味での解の一様計算可能性は，直観主義高階算術体系にシグマ02二重否定シフト原理と可算選択公理を加えて得られる準直観主義高階算術体系における証明可能性によって特徴づけられることを示した．
さらに，この準直観主義高階算術体系と構成的逆数学における既存の体系の関係性を解明した．

研究成果の概要（英文）：We show that for any existence sentences of some syntactical form, the solution is uniformly computable in the sense of primitive recursive functionals in all finite types and its verification can be carried out in the classical arithmetic containing arithmetical comprehension axiom in all finite types if and only if the existence sentence is provable in semi-intuitionistic finite-type arithmetic containing the numerical double negation shift scheme restricted to Sigma02 formulas with function parameters and the axiom schema of countable choice for numbers.
In addition, we analyze the interrelation between the semi-intuitionistic system mentioned above and other semi-intuitionistic systems considered in constructive reverse mathematics.

研究分野：数学基礎論

キーワード：構成的数学　計算可能数学　逆数学　存在定理　直観主義算術　論理原理

１．研究開始当初の背景

数学の定理の多くは「条件を満たす全ての X に対して，条件を満たす解 Y が存在する」という形をしており，そのような何かしらの解の存在を主張する定理は「存在定理」と呼ばれる．構成的数学と計算可能数学は 1960 年代以降大きく発展した数学基礎論の主要分野であり，それぞれ「構成可能性」及び「一様計算可能性」という視点に立って数学を展開する．構成的数学においてはその証明の全てにおいて構成的な推論のみが認められる．特に，通常の数学で認められる背理法等の非構成的な推論や排中律等の非構成的原理の使用は構成的数学では認められない．そのため，通常の数学で証明される存在定理の中には構成的数学では証明されないものもある．一方，計算可能数学では通常の数学の定理を計算可能性の観点から再考察する．特に，存在定理は計算可能数学における主要な興味の対象であり，「条件を満たす X から条件を満たす解 Y が一様に計算できるか否か」が問題となる．構成的数学と同様に，通常の数学で証明される存在定理の中には上記の意味で計算可能ではないものも多くあることが知られている．また，これまでの長年の研究の中で両者の結果には類似性があることが経験的事実として知られている．つまり，構成的数学で証明できる存在定理のほとんどは計算可能数学の意味で(一様)計算可能であり，逆に構成的数学で証明できない存在定理のほとんどは計算可能数学の意味で(一様)計算可能ではないのである．なお，これらとは別に 1980 年代以降大きく発展した逆数学と呼ばれる数学基礎論の研究プログラムがある．逆数学では公理を弱めた(古典)高階算術体系の上で数学の諸定理を形式化し，各定理を証明するのに必要かつ十分な公理(系)を調べる．従来の逆数学研究において基礎となる公理系として一般的に用いられていたものは非一様な計算可能数学に対応するものであった．一方，近年では構成的逆数学と呼ばれる，直観主義高階算術体系の上での逆数学研究も行われていた．

２．研究の目的

前項で既に述べた通り，構成的数学と計算可能数学の間には密接な関係があることが示唆されていた．本研究の目的は，構成的数学における存在定理の証明可能性と計算可能数学における存在定理の解の一様計算可能性の間の関係を精査することである．

３．研究の方法

本研究のための主要な方法は，逆数学において用いられている形式体系を用いて構成的数学における存在定理の証明可能性と計算可能数学における存在定理の解の一様計算可能性の両者を適切に形式化し，証明論の手法を用いて両者の関係を調べるというものである．特に，直観主義論理に基づく体系と古典論理に基づく体系の関係を調べる際の一般的手法である否定翻訳と呼ばれる証明論手法や直観主義高階算術体系からその計算情報を抽出する際に有効である型付き実現可能性解釈と呼ばれる証明論手法を用いた．

４．研究成果

(1) 筆者は，自身の先行研究において，「X から Y を計算する(高階算術体系の意味で)原始再帰的な一様計算手続きが存在し，それが正しく解を与えていることが非一様計算可能数学に対応する逆数学の基礎体系において証明される」という概念は，その存在定理が構成的逆数学の基礎体系において証明されることとおおよそ一致することを明らかにした．一方で，計算可能数学においては，与えた計算手続きが正しく解を与えていることの証明は数学的に正しければそれで十分であるため，上記の概念は計算可能数学における存在定理の解の一様計算可能性の形式化としてはやや弱いように思われる．一方，これまでの逆数学研究において，古典的な数学の大部分を展開するには非一様計算可能数学に対応する逆数学の基礎体系では不十分なものの，算術的内包公理を公理に含む体系であればおおよそ十分であることが知られていた．つまり，上記の概念において「計算手続きが正しく解を与えている」ことの証明を実行する体系をその公理に算術的内包公理を含むものに強めればそれは計算可能数学における存在定理の解の一様計算可能性の形式化と見なせるように思えるわけである．

そこで，本研究では「X から Y を計算する(高階算術体系の意味で)原始再帰的な一様計算手続きが存在し，それが正しく解を与えていることが算術的内包公理を含む古典高階算術体系において証明される」ことと構成的逆数学の基礎体系におけるその存在定理の証明可能性の関係を調べた．そして，比較的単純な論理式として形式化される全ての存在定理に対しては，上記の意味での解の一様計算可能性は，構成的逆数学の基礎体系に二重否定シフト原理:

$$\forall x \neg\neg A(x) \to \neg\neg \forall x\, A(x)$$

の非常に弱い断片であるシグマ 02 二重否定シフト原理と可算選択公理を加えて得られる準直観主義高階算術体系における証明可能性によって特徴づけられることを示した．

(2) 研究成果(1)を踏まえ，シグマ 02 二重否定シフト原理を含む準直観主義高階算術体系の論理的な強さを解析した．構成的数学のほとんどは直観主義高階算術体系の上で模倣できることが知られており，そのため，構成的逆数学の基盤体系として直観主義高階算術体系が用いられることが一般的である．一方，直観主義高階算術体系に関するダイアレクティカ解釈の古典的な結果から，シグマ

02 二重否定シフト原理は直観主義高階算術体系では証明できないことがすぐに分かる．そのため，シグマ 02 二重否定シフト原理を含む準直観主義高階算術体系における証明可能性は構成的数学における証明可能性よりも真に強いように思われる．さらに，古典算術体系では公理として認められるが直観主義高階体系では証明されない制限された論理原理(二重否定シフト原理は含まない)の間の相互導出関係が構成的逆数学の文脈で既に知られていた．つまり，シグマ 02 二重否定シフト原理を含む準直観主義高階算術体系の論理的な強さを調べることは計算可能数学における存在定理の解の一様計算可能性と構成的数学におけるその証明可能性の差異がどれほどのものかを調べることに対応する．これを踏まえ，筆者は Ulrich Kohlenbach 氏との共同研究として，弱い二重否定シフト原理と構成的逆数学の文脈で用いられている論理原理の間の相互導出関係を調べた．特に，二重否定シフト原理が排中律原理の二重否定版と直観主義論理上同値になるという事実に着目し，シグマ 02 二重否定シフト原理及びそれよりさらに弱いシグマ 01 二重否定シフト原理と排中律原理，ド・モルガン法則，二重否定除去原理の断片の二重否定版の間の相互導出関係を詳しく解析した．そして，直観主義一階算術体系及び直観主義二階算術体系における上記の論理原理の間の相互導出関係を完全に解明した．特に，直観主義高階算術体系上，可算選択公理があればシグマ 02 二重否定シフト原理はシグマ 01 排中律原理から導出されるが，可算選択公理がなければシグマ 02 二重否定シフト原理はシグマ 01 排中律原理からは導出されないという非常に精緻な解析結果を得た．

(3) 計算可能解析学や計算可能組合せ論におけるいくつかの具体的な存在定理の証明を精密に解析し，それらが(1)の方法で形式化し得るかを検証した．その結果，与えられている一様計算手続きの多くは再帰的ではあるものの(高階算術体系の意味で)原始再帰的ではなく，(1)の形式化は存在定理の解の一様計算可能性の一般的な表現としては弱すぎることが判明した．そこで，一部研究計画を見直し,計算可能数学における存在定理の解の一様計算可能性を逆数学に関連する形式体系を用いて形式化する方法について再検討した．その結果，候補となる幾つかの形式化に関して，それらの直観主義高階算術体系における証明可能性との関係について一定の知見が得られた．しかし，新しく与えたそれらの形式化が計算可能解析学や計算可能組合せ論における具体的な存在定理の証明にどの程度適用できるものであるかの検証は未だ十分にできておらず，それは今後の課題である．

一方で，計算可能数学における存在定理の解の一様計算可能性を一般的な形で自然に形式化することは容易ではなく，その形式化の妥当性は慎重に吟味される必要があるという認識は本研究から得られた知見の一つと言える．

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　２件）

1. Makoto Fujiwara and Ulrich Kohlenbach, Interrelation between weak fragments of double negation shift and related principles, The Journal of Symbolic Logic, to appear, 2018. (査読有り， 掲載決定)

2. Makoto Fujiwara, Effective computability and constructive provability for existence sentences (Abstract), The Bulletin of Symbolic Logic, vol 23, no.2, pp. 241-242, 2017. (査読有り)

〔学会発表〕（計　６件）

1. Makoto Fujiwara, Interrelation between the fragments of logical principles over intuitionistic arithmetic and analysis, 2018 Chinese Mathematical Logic Conference, Qiannan Normal University for Nationalities, Duyun, China, May 13, 2018. (招待講演)

2. Makoto Fujiwara, Reverse mathematics and uniform provability, Philosophy of logic and Mathematics - Towards Philosophy of Proofs, Keio University, Tokyo, Japan, January 13, 2017. (招待講演)

3. 藤原誠, 算術における弱い二重否定シフト原理について, 第４回山陰 基礎論･解析学 研究集会, 国際ファミリープラザ, 米子市, 2017 年１月８日.

4. Makoto Fujiwara, Weak fragments of double negation shift and related principles in arithmetic, The 51st Mathematical Logic Group Meeting (MLG), Shiki-no-Yu Gora-Seiunsou, Hakone-cho, Japan, October 27, 2016.

5. Makoto Fujiwara, Effective computability and constructive provability for existence sentences, Workshop on Mathematical Logic and its Applications, Kyoto University, Kyoto, Japan, September 16, 2016.

6. Makoto Fujiwara, Effective computability and constructive provability

for existence sentences, Logic Colloquium 2016, University of Leeds, Leeds, U.K., August 5, 2016.（査読有り）

〔図書〕（計　0 件）

〔産業財産権〕

○出願状況（計　0 件）

○取得状況（計　0 件）

〔その他〕
ホームページ等
https://www.waseda.jp/inst/wias/other/2016/04/01/1864/

６．研究組織
(1)研究代表者
藤原　誠（FUJIWARA, Makoto）
早稲田大学・高等研究所・助教
研究者番号：20779095

(4)研究協力者
Ulrich Kohlenbach（KOHLENBACH, Ulrich）
Technische Universität Darmstadt,
Department of Mathematics, Professor.