

令和元年6月12日現在

機関番号：32689

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2016～2018

課題番号：16K05065

研究課題名(和文)実双曲空間上の実解析的保型形式のリフティングによる多様な構成と多方面分野への応用

研究課題名(英文)Various constructions of real analytic automorphic forms on real hyperbolic spaces and their application to various research fields

研究代表者

成田 宏秋(Narita, Hiro-aki)

早稲田大学・理工学術院・教授

研究者番号：70433315

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,400,000円

研究成果の概要(和文)：保型形式論の一つの基本的な目標は、古典的な複素1変数の保型形式の研究を多変数の場合に拡張することである。その方向性は様々あるが、本研究の問題意識は多変数の保型形式でも、正則でない実解析的なものの具体的構成にある。今回の研究では複素上半平面の自然な高次元化である実双曲空間上の保型カusp形式を、複素1変数で実解析的なMaassカusp形式からの「リフト」という操作で具体的構成を与えた。正確には次元が5次元と $8n+1$ 次元( $n$ は任意の正整数)の場合で具体的構成を与えた。またこれらの構成に関する保型表現論の視点からの一般論も与えた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

まず、実解析的カusp形式を具体的構成を与えた研究は極めて少ないことは、今回の研究成果の意義を強調するものである。また $8n+1$ 次元実双曲空間上のカusp形式については、「テータリフト」という方法で構成したが、非調和的な多項式を含む試験関数により構成を与えた。このような例は多変数の保型形式の枠組みで私は見たことがない。直交群についてArtherの内視分類理論による保型表現の大きな分類理論が確立されているが、今回の成果はその分類理論の成果の外にある結果である。また構成したカusp形式の非消滅も証明したが、既存の方法に比べ初等的な方法で証明したことも本研究成果の意義を示すものである。

研究成果の概要(英文)：One fundamental problem in the theory of automorphic forms is to extend the research of automorphic forms of one complex variable to those of multi-variables. Though there are many directions of such extensions, the fundamental aim of this research project is to construct non-holomorphic real analytic automorphic forms. In the project I have succeeded in constructing real analytic cusp forms on real hyperbolic spaces (which is a natural higher-dimensional generalization of the complex upper half plane). More precisely I have carried out such constructions for 5-dimensional and  $8n+1$  dimensional cases for arbitrary positive integer  $n$ . In addition, I have also provided a general theory relevant to the constructions in terms of the theory of automorphic representations.

研究分野：整数論、保型形式論

キーワード：実解析的保型形式 逆定理 テータリフト 実双曲空間 特殊Bessel模型 局所Maass関係式 非緩増加保型形式

## 1. 研究開始当初の背景

この研究期間が始まる以前において、武藤正紀氏とオクラホマ大学の Ameya Pitale 氏との共同研究により定符号四元数環上の次数 2 の一般線形群の実解析的カスプ形式のリフティングによる具体的構成を与えており、これは 5 次元実双曲空間上のカスプ形式を与えることと本質的に同じである。現在は James Arthur による内視分類理論により保型表現の枠組みでの一般論が進展を見せ始めているが、非正則実解析的保型形式の具体的構成の研究成果は非常に貧弱である。またこの具体的構成は多方面分野への応用の可能性を示唆しており、特に Borcherds の実解析的または弱保型形式のテータリフトの理論は、保型形式のリフティングによる構成が 4 次元トポロジーの「壁越え公式」等の幾何学的応用を含む多方面への広がり可能性を指摘しており、本研究の動機付けに少なからぬ影響を与えた。

## 2. 研究の目的

本研究の目的は、端的に言えば、上述の定符号四元数環上の次数 2 の一般線形群上のカスプ形式の研究の拡張を主眼とするものである。例えば、既存の研究では定符号四元数環の判別式が 2 の場合を扱ったが、他の判別式で考えてみる問題が自然にある。またこのカスプ形式は 5 次元実双曲空間上の保型形式と見做せることに注意すると、一般次元の実双曲空間の場合に構成を考えてみるという研究も自然に考えられる。これらの保型形式を 1 変数 Maass カスプ形式からのリフティングという方法で構成するのがこの研究の主な目標である。また可能であれば、Borcherds による非特異化テータリフトによる保型形式の構成についても研究したいと考えた。ここまで進展すれば多方面分野への研究の拡張を視野に入れることができると想定し研究提案をまとめた。

## 3. 研究の方法

研究手法としては、1 変数の主に実解析的カスプ形式からのリフトによるカスプ形式の構成を以下の 2 つの手法により与えることである。

- (1) Maass の実双曲空間上の実解析保型形式の特徴づけを与える「逆定理」を用いてリフトを与える。(Ameya Pitale 氏との共同研究で行うのが当初の想定)
- (2) テータリフトを用いたリフトの構成、テータ核と呼ばれる積分核との畳み込みで構成する方法。

また、後者の研究が進展すれば Borcherds の非特異化テータリフトの研究も視野に入る。この手法については無限積表示を持つ保型形式の構成を視野に入れつつ京都産業大学の村瀬篤氏と連携しながら行うのが当初の想定であった。

## 4. 研究成果

### (1) 研究成果の内容など：

今回の研究期間において、3 つの研究成果を得た。まず以下では各成果ごとにその具体的内容等を説明する。

まず最初に 1 変数 Maass カスプ形式からのリフトにより、 $8n + 1$  次元実双曲空間 ( $n$  は任意) 上の実解析的カスプ形式を構成したことについて説明する。これは Darmstadt 工科大の Yingkun Li 氏と Oklahoma 大学の Ameya Pitale 氏との共同研究による成果である。この研究は Ameya Pitale 氏との共同研究から始まったもので、Maass の逆定理を使うアイデアでリフトのフーリエ係数の明示型は突き止めていた。言い換えればリフトを具体的 Fourier 級数表示で与えることはできていた。そして当初は Maass の逆定理による方針はリフトで与えたカスプ形式の保型性も証明できていたと考えていた。しかし、この方針による保型性の証明にはギャップがあることを発見し、しばし研究が停滞した時期があったが、研究期間 2 年目の後半にドイツのマックスプランク数学研究所での集会で Yingkun Li 氏の指摘により Pitale 氏と構成したリフトはテータリフトにより構成が可能であるとの指摘を受け、議論の結果実際に可能であることを確認し保型性の証明も完了するに至った。そして Yingkun Li 氏を論文の共著者に加えることにし論文を書きあげた。研究成果を挙げた直後の論文は Math Archive に上がっているが、現在数学雑誌掲載を目指して論文をヴァージョンアップしているところである。

で得た保型形式の構成に関連する一般論として、一般の代数体上の非コンパクト直交群上の保型形式が一つの非アルキメデス素点で「特殊 Bessel 模型」を持ち、「局所 Maass 関係式」を満たすなら、その素点で「非緩増加(non-tempered)」であることを証明した。まずこの成果の背景として多変数保型形式の Ramanujan 予想の最初の反例の一つとして有名になった齋藤-黒川リフトが、フーリエ係数の簡単な線形関係式による特徴づけを持つという事実を思い出すべきであろう。これが他ならぬ Maass 関係式の原型である。その後、さまざまな Maass 関係式の一般化ないしは類似が与えられ

たが、それらは主にジークル上半空間やその一般化である管型領域という複素解析的領域上の正則保型形式に対して得られた成果であったが、今回得た結果は、管型領域上の保型形式の枠組みの外で、Maass 関係式に加えて特殊 Bessel 模型を持つという条件が非緩増加な有限素点を持つ保型形式を与えるというものである。これは で構成したカスプ形式のみならず、楕円カスプ形式からのリフトで作られる IV 型領域上のカスプ形式である Oda-Rallis-Schiffmann リフトを含む一般論である。定符号四元数環上の 2 次的一般線形群上の実解析的カスプ形式について、既存の結果である「判別式 2」の場合に加えて「判別式 3, 5」の場合も同様の方法で構成できることを確認した。これは Ameya Pitale 氏との共同研究による Maass の逆定理を使った方針による成果である。この研究の背後にあるエッセンスとして、有理数体上の定符号四元数環の極大整環でユークリッド整域の類似の性質を持つものの分類について調べたことがある。今回の研究で判別式が素数の場合で極大整環で既述の性質を持つものは、判別式が 2, 3, 5 の場合に限ることを突き止めた。これにより極大整環を係数とする次数 2 の一般線形群で与えられる離散群の生成元を具体的に決定することができ判別式 2 の場合だけでなく 3, 5 の場合も Maass の逆定理が使える状況であるということが分かった。現在は論文を執筆中で完成し次第、Math Archive への掲載、ないしは数学雑誌掲載に向けて準備を進めようという段階に来ている。

#### (II) 研究成果のインパクト、意義：

以上述べた、カスプ形式の構成は「Ramanujan 予想」の反例、つまりカスプ保型表現はすべての素点で緩増加 (tempered) であろうという 1 変数楕円カスプ形式の場合の Ramanujan 予想の多変数の場合への形式的拡張を否定する反例を与える。しかも「非正則実解析保型形式で与えた」という研究は既存の研究を見つけることは難しく (おそらく殆どない)、これは研究のインパクトを説明する一つのポイントと言える。実際、最近進展が著しい Arthur の内視分類をもとにした保型表現論の進展は、非緩増加な素点を持つカスプ形式を満足に捕まえられているとは言えず、我々の研究成果をカバーしているものとは言えない。

また で得た一般論が扱う非コンパクトな直交群上の保型形式は、保型形式の構成という観点での研究成果が非常に乏しく十分に研究されている対象とは言えない。実際、IV 型対称領域上の双正則自己同型群が符号  $(2+, n-)$  ( $n$  は任意の正の整数) の非コンパクト直交群となり、その上には正則保型形式が存在し研究対象として十分手が出る対象となり得るが、それ以外の直交群は正則保型形式が存在せず、複素解析が通用しない文脈での研究を強いられる。この も既存研究の枠組みの外にある成果としてインパクトを強調することができよう。

#### (III) 今後の展望：

最後に今後の研究の展望について述べる。今回の研究で得られた  $8n + 1$  次元の実双曲空間の保型形式の構成は、当初は Maass の逆定理で証明する方針であった。正確には Maass の逆定理のアデル化を考えるとという方針であったが、議論にギャップがあることを発見し、結果今回の研究期間で逆定理を用いた証明については成果が得られなかった。この逆定理は「そもそも保型形式の保型性とは何か」という問の本質に迫る重視すべき課題であると見ている。確かに今回の研究では成果が得られなかったが、どこに本質的な困難があるかは理解することができた。逆定理については今後も研究を継続する方針である。

また、非特異化テータリフトについても研究成果が得られなかったが、今回得た実解析的保型形式はテータリフトで具体的に構成できるという成果は、この新しい研究の方向性にもつながる成果であると考えられる。  $8n + 1$  次元双曲空間上のカスプ形式のテータリフトによる構成を与えた後、このテータリフトをヒントに 1 変数弱楕円保型形式の典型例である J 関数の非特異化テータリフトなどを考える考察などを試みたが、結局成果は得られなかった。今回の研究では逆定理の方針による研究が想定通りに進展せず、テータリフトによる研究成果が出たのがきちんと認められたのは 2 年目の終り頃の話で、非特異化テータリフトの方向の研究に十分な時間を掛けられなかったとも言えるし、十分な進展を得るにはもっと時間をかける必要のある研究であると認識するに至っている。実際、Borchers が成果を挙げた非特異化テータリフトの研究成果は複素解析的なものが主であり、解析接続が使える設定であることが効いている。複素解析的でない実解析的な枠組みに非特異化テータリフトにより保型形式の具体的構成を拡張するには新しいアイデアを要するものと思われる。

最後に については、斜体上の一般線形群に対する保型形式の Jacquet-Langlands 対応の観点から興味深い対象であることをここで述べておく必要がある。この対応は所謂 Langlands 函手性という保型形式 (ないしは保型表現) の数論的対応の典型例であり、Badulescu-Renard による一般論があるが、この対応に関わる保型形式を実解析的保型形式で構成した例は他に聞いたことがない。また Pitale 氏の学生の Siddhesh Wagh 氏による Maass 関係式によるリフトの特徴づけに関する研究成果が最近報告されており、その証明には Jacquet-Langlands 対応が本質的に効いている。このように我々が構成したリフトによるカスプ形式の構成の数論的研究が進展を見せ始めているようであり、更なる研究の発展が期待される。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕(計 0件)

〔学会発表〕(計 7件)

1. 成田宏秋、Special Bessel model with the local Maass relation and non-tempered automorphic forms on orthogonal groups, Number theory seminar, (招待講演)、2019年、Duke University (USA)
2. 成田宏秋、Non-tempered cusp forms on orthogonal groups of rank one, 東工大数論・幾何学セミナー、(招待講演) 2018年、東京工業大学
3. 成田宏秋、An explicit construction of non-tempered cusp forms on  $O(1,8n+1)$ , 早稲田整数論セミナー、(招待講演) 2018年、早稲田大学理工学術院
4. 成田宏秋、Explicit construction of non-tempered cusp forms on orthogonal groups of low split ranks, 保型形式の解析的・数論的研究、RIMS 共同研究(公開型)、(招待講演、国際学会) 2018年、京都大学数理解析研究所
5. 成田宏秋、Explicit constructions of non-tempered cusp forms on orthogonal groups of low split ranks, 3rd Japanese-German number theory workshop (招待講演、国際学会) 2017年、Max Planck Institute for Mathematics (Germany)
6. 成田宏秋、A remark on special Bessel models and its application to some lifting theory, Special values of automorphic L-functions, periods of automorphic forms and related topics, 古澤昌秋教授還暦記念集会 (招待講演、国際学会)、2017年、大阪市立大学理学部
7. 成田宏秋、Adelized Maass converse theorem and lifting to orthogonal groups of rank one, 概均質セミナー (招待講演)、2016年、早稲田大学教育学部

〔図書〕(計 0件)

〔産業財産権〕

出願状況(計 0件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
出願年：  
国内外の別：

取得状況(計 0件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
取得年：  
国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等

○発表論文：Yingkun Li, [Hiro-aki Narita](#) and Ameya Pitale, An explicit construction of non-tempered cusp forms on  $O(1,8n+1)$ , arXiv:1806.10763(査読無).

○ホームページ：<http://www.f.waseda.jp/hnarita/english.htm>

## 6. 研究組織

連携研究者

連携研究者氏名：村瀬篤

ローマ字氏名：Atsushi Murase

所属研究機関名：京都産業大学

部局名：理学部

職名：教授

研究者番号(8桁): 40157772

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。