

平成 31 年 4 月 26 日現在

機関番号：10101

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2016～2018

課題番号：16K05086

研究課題名(和文)代数多様体のモジュライにかかわる特殊関数の研究

研究課題名(英文) Research of special functions associated with moduli spaces of algebraic varieties

研究代表者

松本 圭司 (Matsumoto, Keiji)

北海道大学・理学研究院・教授

研究者番号：30229546

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,600,000円

研究成果の概要(和文)：7つのパラメーターを有する2変数階数9の超幾何微分方程式系を導入した。その方程式系の局所解空間の基底に対する積分表示を与え、解の大域挙動を表すモノドロミー表現を決定した。ある2次元K3曲面族の周期写像をある種数2の代数曲線のアーベル・ヤコビ写像を利用して研究した。そして、その逆写像をテータ関数を用いて具体的に表示した。

相対ねじれ(コ)ホモロジー群とその群上の交点形式を導入して、パラメーターに関する非整数条件をみたさない場合でも有効となる多変数幾何微分方程式系 Lauricella's F_D の新しい研究手法を開発した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

多変数幾何微分方程式系 Lauricella's F_D の研究に、相対ねじれ(コ)ホモロジー群を導入し、交点理論を整理したことが一番大きな成果である。パラメーターが整数となる場合でも、これらの群上に定まる交点形式を用いて、解たちがみたす性質を考察することが可能となった。

この研究で得られた理論の統計学や数理物理学への応用や、解の多重積分表示を有する多変数超幾何微分方程式系や超幾何関数以外の積分表示を有する特殊関数に対する新しい理論展開、等の研究進展が期待できる。

研究成果の概要(英文)：We introduce a hypergeometric system of differential equations in two variables with rank 9. We give integral representations of solutions forming a basis of a local solution space to this system, and study its monodromy representation, which describes global behavior of solutions to this system.

We study a period map for a 2-dimensional family of K3-surfaces by using Abel-Jacobi map for a family of algebraic curves of genus 2. We express its inverse in terms of theta functions.

We give a new approach to study Lauricella's hypergeometric system F_D by introducing relative twisted (co)homology groups and intersection forms on them.

研究分野：特殊関数論

キーワード：超幾何微分方程式系 モノドロミー表現 ねじれホモロジー群 ねじれコホモロジー群 既約性 テータ関数

1. 研究開始当初の背景

- (1) Appell's $F_2(4/3, 4/3, 2/3, 2/3, 4/3)$ に関する Schwarz 写像をある $K3$ 曲面族の周期写像やある種数 2 の代数曲線の周期写像を用いて考察する研究協力者 ① との共同研究は開始されていた。
- (2) 2 変数階数 9 のある超幾何微分方程式系の研究協力者 ②, ③ たちとの共同研究は, 原点に近い点における局所解空間の基底をなす級数解を与えることができ, 研究の基礎は固まりつつあった。
- (3) 多くの超幾何微分方程式系において, パラメーターに関する非整数条件がみたされない場合, 構成した解が定義されなくなったり 0 に退化してしまうことが生じる. そのような具体例を相当数扱い, パラメーターに関する非整数条件がみたされない場合の対処にかなり精通していた。

2. 研究の目的

この研究の目的として, 以下の四つ基軸を設定する。

第一に, 種々の代数多様体のモジュライに関する特殊関数たちの導入を試みる。

第二に, 導入した新しい特殊関数だけでなく, 既知の特殊関数に対しても微分方程式系や関数等式の構成を目指す。

第三に, 微分方程式系や関数等式に関する公式の詳しい解析を行う。

第四に, 特殊関数に関する公式の数論, 結び目・絡み目論, 統計学, 等の他分野への応用を図る。

150 年以上前に発見された特殊関数に関する公式で, 現在もなお多くの分野で使われ続け, その輝きを失っていないものが数多く知られている. 永遠不滅の知的財産と認められるような, 数学公式の構成が究極の研究目的である。

3. 研究の方法

(1) 数式処理システム Maple を用いて, いくつかの多変数超幾何微分方程式系の基本群の生成系に対する周回行列の自動作成プログラムを構成した. その周回行列たちがみたす関係式を見つけ出し, 基本群の生成系がみたす関係式を予想し, そのうちのいくつかの予想は証明することができた. また, 導き出された公式の Maple を用いた数値計算による検算が多数実行された。

(2) 合宿型の研究会である第 10,11,12 回玉原特殊多様体研究会を研究協力者 ① と共催した. その集会を通して, 研究結果の発表や最新の研究情報の収集ができただけでなく, 研究協力者 ① との議論により大きな研究進展が得られた。

(3) 研究協力者 ② を招聘し, いくつかの局所系の底空間の基本群の構造について議論を行い, 研究の進展を図った。

(4) 超幾何微分方程式系が定める D -加群のグレブナー基底の計算を研究協力者 ③ が実行し, その微分方程式系の階数と特異点集合の決定を行った。

(5) 神戸大学で開催された超幾何方程式研究会や日本数学会年会・秋季総合分科会, 研究会・セミナーに参加し, この研究に関する情報収集および研究結果の発表を行った. また, 北海道特殊関数セミナーを立ち上げて, この研究に関する研究者を招き, 講演を依頼し, 研究交流を行った。

4. 研究成果

(1) 3 階の一般超幾何微分方程式 ${}_3F_2\left(\begin{matrix} a_1, a_2, a_3 \\ b_1, b_2 \end{matrix}\right)$ の自然な拡張にあたる 7 つのパラメーターを有する 2 変数階数 9 の超幾何微分方程式系を導入した. その方程式系の局所解空間の基底に対する積分表示を与えた. そして, ねじれホモロジー群に関する交点形式を利用して, パラメーターに関する非整数条件の下で, 解の大域挙動を表すモノドロミー表現を決定した. これらの研究成果は共同研究者との共著論文として, 以下の発表論文 ⑦ に記載されている. この微分方程式系の局所解空間をファイバーとする局所系の構造を詳しく調べた. 底空間の基本群の生成元とそれらの関係式を完全に決定し, パラメーターに関する非整数条件の下で, モノドロミー表現の既約性を示した. これらの結果をまとめた共同研究者との共著のプレプリント

”The structure of a local system associated with a hypergeometric system of rank 9“

は, ある査読付き雑誌に現在投稿中である. また, 階数 p の一般超幾何微分方程式 ${}_pF_{p-1}$ の一般化として, k 変数の階数 p^k の超幾何微分方程式系が導入されており, 現在その詳しい性質を研究中である。

(2) 2 変数超幾何微分方程式系 Appell's $F_2(a, b_1, b_2, c_1, c_2)$ が可約になる場合に, 局所解空間の構造を調べた. そして可約となる $a - c_1, a - c_2 \in \mathbb{Z}$ の場合に, モノドロミー表現を考察した. 特に $a = c_1 = c_2 = 4/3, b_1 = b_2 = 2/3$ の場合に, $F_2(4/3, 2/3, 2/3, 4/3, 4/3)$ の局所解の比を取るこ

で得られる Schwarz 写像の挙動を研究した. そのモノドロミー表現には三角群 $(3, \infty, \infty)$ が上半空間 \mathbb{H} に作用する $\Gamma_1(3)$ として現れることが示された. これらの結果は, 以下の発表論文 ⑥ に記載されている. また, この Schwarz 写像は, ある $K3$ 曲面族の周期写像とみなすことができ, それをある種数 2 の代数曲線のアーベル・ヤコビ写像を利用して研究した. そして, その逆写像をテータ関数を用いて, 具体的に表示した. これらの研究成果は共同研究者との共著論文として, 以下の発表論文 ② として掲載決定となっている.

(3) 多変数幾何微分方程式系 Lauricella's $F_D(a, b_1, \dots, b_m, c)$ の解の線積分表示に関するねじれホモロジー群をファイバーとする局所系を構成し, その構造を a, b_1, \dots, b_m, c に関する非整数条件のいくつかのみたされない場合を含めて考察した. その局所系のモノドロミー表現を底空間の基本群の生成元に対する周回変換を与えることで決定した. これらの研究結果は以下の発表論文 ⑤ として出版されている. ここでの考察が基になり, ねじれホモロジー群を相対ねじれホモロジー群に拡張することで, a, b_1, \dots, b_m, c がすべて整数になる場合でも, 構成した局所系が多変数幾何微分方程式系 Lauricella's $F_D(a, b_1, \dots, b_m, c)$ の局所解空間をファイバーとする局所系と同型になることを示した. 相対ねじれコホモロジー群も導入して, 相対ねじれホモロジー群と相対ねじれコホモロジー群とのペアリングとこれらの群上で定義される交点形式との整合性を示し, ここでも周期関係式が成立することを示した. それに関するガウス・マニン接続を利用して超幾何微分方程式系を考察した. これらの結果をまとめたプレプリント

“Relative twisted homology and cohomology groups associated with Lauricella's F_D ”
は現在ある査読付き雑誌に現在投稿中である.

現時点では, 線積分表示に対応する 1 次 (コ) ホモロジー群に対する理論しか出来上がっていないが, 多重積分表示に対する拡張が期待されている. この研究で得られた理論の統計学や数理論理学への応用や超幾何関数以外の積分表示を有する特殊関数に対する新しい理論展開, 等も期待でき, とても重要な研究課題であると考えている.

(4) モノドロミー群として三角群 $(2, 4, 4)$ と $(2, 3, 6)$ が現れる Schwarz 写像をある楕円曲線族に関するアーベル・ヤコビ写像を用いて考察した. ここでの楕円曲線族は虚数乗法を有しており, それに関するテータ関数の変換公式を作成した. その応用として, 2 種類の平均を繰り返し行い, 得られた極限値を超幾何関数で表示する数論的な公式を与えた. これらの結果は, 以下の発表論文 ④ に記載されている.

(5) 変数の個数が $(k+n)k$ で階数が $\binom{k+n}{k}$ となる超幾何微分方程式系の Pfaffian 方程式と接続関係式をその解の積分表示に関するねじれコホモロジー群の交点形式を利用して研究した. この方程式系は k, n が大きくなると急速に階数が増えて, Pfaffian 方程式や接続関係はとても複雑になるのだが, 交点形式のある種の不変性を用いることでこの困難を解決している. ここでの手法は他の超幾何微分方程式系でも有効なはずなので, この方面の研究の基礎を築いたことに相当する. また, 得られた公式は統計学で現れる正規化定数の計算に応用された. これらの結果は, 以下の発表論文 ③ に記載されている.

(6) m 変数超幾何微分方程式系 Lauricella F_C は, 階数が 2^m であり, その特異点集合は座標超平面と 1 つの既約多項式からなっている. パラメーターがある種の非整数条件をみたすとき, 原点の近くの点における局所解空間は 2^m 個の超幾何級数による基底が取れることが知られている. しかし, この方程式系のモノドロミー表現の既約性を考察する際, この非整数条件が障害となる. そこで, この非整数条件をみたさない場合でも基底として有効となる 2^m 個の解を構成し, モノドロミー表現が既約となるための十分条件を与えた. その条件は 2^{m+1} からなるが, その 1 つがみたされない場合にモノドロミー表現の不変部分空間を具体的に与えることで, その表現が既約にならないことを示した. これらの結果は, 以下の発表論文 ① として掲載決定となっている.

5. 主な発表論文等主な発表論文等 〔雑誌論文〕(計 7 件)

- ① Goto Yoshiaki and Matsumoto Keiji, Irreducibility of the monodromy representation of Lauricella's F_C , Hokkaido Mathematical Journal, 査読有, 掲載決定.
- ② Matsumoto Keiji and Terasoma Tomohide, Period map of triple coverings of \mathbf{P}^2 and mixed Hodge structures, Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences, 査読有, 掲載決定.
- ③ Goto Yoshiaki and Matsumoto Keiji, Pfaffian Equations and Contiguity Relations of the Hypergeometric Function of Type $(k+1, k+n+2)$ and Their Applications, Funkcialaj Ekvacioj, 査読有, 61 (2018), no. 3, 315–347.

- ④ Koguchi Yuto, Matsumoto Keiji and Seto Fuko, Schwarz maps associated with the triangle groups (2,4,4) and (2,3,6), Hokkaido Mathematical Journal, 査読有, **47** (2018), no. 1, 69–108.
- ⑤ Matsumoto Keiji, The monodromy representations of local systems associated with Lauricella's F_D , Kyushu Journal of Mathematics, 査読有, **71** (2017), no. 2, 329–348.
- ⑥ Matsumoto Keiji, Sasaki Takeshi, Terasoma Tomohide and Yoshida Masaaki, An example of Schwarz map of reducible Appell's hypergeometric equation E_2 in two variables. Journal of the Mathematical Society of Japan, 査読有, **69** (2017), no. 2, 563–595.
- ⑦ Kaneko Jyoichi, Matsumoto Keiji and Ohara Katsuyoshi, A system of hypergeometric differential equations in two variables of rank 9, International Journal of Mathematics, 査読有, **28** (2017), no. 3, 1750015, 34 pp.

〔学会発表〕(計 6 件)

- ① 松本圭司, 超幾何微分方程式系 $E(k, n; \alpha)$ の射影モノドロミー表現, 第 12 回玉原特殊多様体研究集会, 東京大学玉原国際セミナーハウス (群馬県沼田市), 2018 年.
- ② 松本圭司, 相対ねじれ (コ) ホモロジー群間の交点形式, 第 11 回玉原特殊多様体研究集会, 東京大学玉原国際セミナーハウス (群馬県沼田市), 2017 年.
- ③ 松本圭司, Relative twisted (co)homology groups associated with Lauricella's F_D , 日本数学会 2017 年度 秋季総合分科会, 山形大学 (山形県山形市)2017 年.
- ④ 後藤良彰, 松本圭司, Irreducibility of monodromy representation of Lauricella's F_C , 日本数学会 2017 年会, 首都大学東京 (東京都八王子市), 2017 年.
- ⑤ 松本圭司, パラメーターが整数のときのねじれ (コ) ホモロジー群の挙動, 超幾何方程式研究集会 2017, 神戸大学 (兵庫県神戸市), 2017 年.
- ⑥ 松本圭司, The monodromy representation of Lauricella's F_D with integral exponents, 琉球大学理学部数学科談話会, 招待講演, 琉球大学 (沖縄県中頭郡西原町), 2016 年.

6. 研究組織

(1) 研究協力者

- ① 研究協力者氏名: 寺杣 友秀
 ローマ字氏名: (TERASOMA, Tomohide)
 所属研究機関名: 東京大学
 部局名: 大学院数理科学研究科
 職名: 教授
 研究者番号 (8 桁): 50192654
- ② 研究協力者氏名: 金子 譲一
 ローマ字氏名: (KANEKO, Jyoichi)
 所属研究機関名: 琉球大学
 職名: 名誉教授
 研究者番号 (8 桁): 10194911
- ③ 研究協力者氏名: 小原 功任
 ローマ字氏名: (OHARA, Katsuyoshi)
 所属研究機関名: 金沢大学
 部局名: 理工学域
 職名: 教授
 研究者番号 (8 桁): 00313635

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。