

令和元年6月4日現在

機関番号：12601

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2016～2018

課題番号：16K05089

研究課題名(和文)代数多様体の特異点の研究

研究課題名(英文) Research on singularities on an algebraic variety

研究代表者

石井 志保子 (Ishii, Shihoko)

東京大学・大学院数理科学研究科・名誉教授

研究者番号：60202933

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,500,000円

研究成果の概要(和文)：多様体上の滑らかでない点を特異点と呼ぶが、この特異点の特徴を捉えるためには良い不変数が必要になる。本研究ではMather-Jacobian log discrepancy という不変数を導入しその性質を調べた。この不変数は特異点上の弧空間の言葉で言い換えができるので、それを用いて、正標数の体上定義された多様体の特異点について逆同伴定理や、標数0の曲面上の有限時決定性を証明した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

多様体が滑らかであれば、コホモロジーの消滅定理をはじめとして、色々な良い性質が成立し、多様体全体の様相がわかりやすいのであるが、特異点があるとそれがわかりにくくなる。特異点をよく知ることで、多様体の理解を深めようというのが本研究の意義である。この研究は数学的に意義があることはもちろん、特異点の不変数の一つである log canonical threshold が学習理論において、重要な役割を果たすことが知られていることからわかるように、社会にとっても意義のあることである。

研究成果の概要(英文)：A non-smooth point on a variety is called a singularity. In order to study those singularities, we need good invariants. In this research, we introduce an invariant; Mather-Jacobian log discrepancy and study the properties of this invariant.

This invariant is interpreted in terms of the arc space on singularities of a variety. Therefore, making use of it, we obtain Inversion of Adjunction for the base field of positive characteristic and finite determinacy for the M-J log discrepancy for surfaces of characteristic 0.

研究分野：代数幾何学

キーワード：singularities arc space minimal log discrepancy

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

代数幾何学における特異点の研究は、1966年のM. Artinの“On isolated rational singularities of surfaces”に始まる。その後、ヨーロッパを中心にして2次元特異点の研究が盛んに行われた。1980年代に入ると「すべての多様体の世界がどのような様相をしているのか」という疑問から生まれたMinimal Model Problem (MMP) が代数幾何学の重要な課題となり、MMPで現れる特異点の研究がこの問題の重要なポイントとなった。MMPの研究の飛躍的な発展とともにそれらの特異点の研究も大きな発展を遂げた。しかし特異点の世界では、MMPに現れる特異点のみが重要であるわけではなく、特異点のリンクや syzygies といった、位相的あるいは環論的など多様な視点で特異点の世界を見ることが必要である。そうすればそれぞれの特異点の意味が明瞭に見え、MMPに現れる特異点の位置づけもより明確になる。

2. 研究の目的

すべての特異点をしかるべき視点で見て、明確な視界を得るためには、「良い不変量」の導入が必要である。申請者はひとつの不変数を導入しそれが「良い不変量」のひとつであることを示し、特異点の色々な性質を見えやすくすることを目的としている。具体的には不変数 MJ-log discrepancy を導入しその最小値 MJ-mld が次元のみに依存して一様に有界な例外因子で計算されることを示すことを目標とする。

3. 研究の方法

プリンストン大学、イリノイ大学シカゴ校、レンヌ第1大学、ミッタク・レフラー研究所、オアハカ、シドニー大学、鹿児島大学、海南島、などでの研究集会で講演および議論をすることによって研究内容を深化させた。

OISTで可換環論の2週間のサマースクールを開催して参加者と議論をして環論的側面からの研究を進めた。

MSRIにおいて実施されたプログラム, Birational Geometry and Moduli Theory に2週間参加し、共同研究者と議論をした。

4. 研究成果

- MJ-discrepancy を用いて MJ-multiplier ideal を導入し、それが良い性質を持っていることを示した。
- MJ-log canonical singularities の general link がまた MJ-log canonical singularities になることを示した。
- MJ-mld を計算する因子の一様有界性を jet scheme の言葉で言い換え、これにより特異点を持つ多様体の基礎体の標数に関わらない問題であることを示した。
- 正標数の2次元の特異点の MJ-mld を計算する因子の一様有界性を示した。
- 任意標数の非退化超曲面の特異点の MJ-mld を計算する因子の一様有界性を示した。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕(計 5件)

1. Shihoko Ishii and L. Ein and M. Mustata  
Multiplier ideals via Mather discrepancy, *Adv. Studies in Pure Math.*, 70, (2017) 1-20
2. Shihoko Ishii and A. Reguera  
Singularities in arbitrary characteristic via jet schemes, “Hodge theory and  $L^2$  analysis”, (2017) 419-449
3. Shihoko Ishii and Wenbo Niu  
A strongly geometric general residual intersection, *AMS Contemporary Mathematics Volume 712*, (2018) 197-210
4. Shihoko Ishii  
Finite determination conjecture for Mather-Jacobian minimal log discrepancies and its applications, *European Journal of Mathematics*, 4 (4), (2018) 1433-1475
5. Shihoko Ishii and L. Ein and T. De Fernex  
Jet closures and the local isomorphism problem, *Journal of Algebra*, 501, (2018) 166-181

〔学会発表〕(計 11件)

1. On finite determinations of MJ-minimal log discrepancies, Tokyo-Princeton Conference of Algebraic Geometry. Princeton University. 2016. 5.7

2. Generic residual intersections and its applications. Global and local methods in Algebraic Geometry, University of Illinois, Chicago, 2016, 5.14
3. Application of jet schemes to singularities in positive characteristic, Arc Schemes and Singularities, University of Rennes 1, Rennes, France, 2016.11.24
4. Injectivity problem of the homomorphism of an Artinian local ring, Problem proposal session of the workshop Lefschetz properties, Mittag-Leffler Institute, Stockholm, 2017.7.11
5. Jet closures and the local isomorphism problem, Workshop Lefschetz properties, Mittag-Leffler Institute, Stockholm, 2017.7.14
6. Mather-Jacobian discrepancies and singularities in positive characteristic, Pacific Rim International conference 3, Oaxaca, Mexico, 2017.8.17
7. Singularities with respect to Mather-Jacobian discrepancies in arbitrary characteristic, Australian-Japanese Workshop on Real and Complex Singularities VII, The University of Sydney, Australia, 2017.9.27
8. The Conjecture of Boundedness of number of blowing-ups to compute MJ-minimal log discrepancies in arbitrary characteristic, FJV 2017 Kagoshima, The 5th Franco-Japanese-Vietnamese Symposium on Singularities, 鹿児島大学, 2017.10.29
9. Singularities with respect to Mather-Jacobian discrepancies, International Conference on Singularity Theory and Dynamical Systems-- in Memory of John Mather, Tsinghua Sanya International Mathematics Forum (TSIMF), Sanya, China, 2017.12.13
10. Singularities in positive characteristic , Workshop, singularities and related topics, University of Tokyo, 2019.7.27
11. Is a singularity determined by the jet schemes? , 代数幾何解析セミナー , 鹿児島大学 , 2019.2.14

〔図書〕（計 1件）

1. Introduction to Singularities (2nd edition) , (236pages), 2018, Springer-Verlag

〔産業財産権〕

○出願状況（計 0件）

名称：

発明者：

権利者：

種類：

番号：

出願年：

国内外の別：

○取得状況（計 0件）

名称：

発明者：

権利者：

種類：

番号：

取得年：

国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等

6. 研究組織

(1)研究分担者

研究分担者氏名：

ローマ字氏名：  
所属研究機関名：  
部局名：  
職名：  
研究者番号（8桁）：

(2)研究協力者

研究協力者氏名：渡辺敬一  
ローマ字氏名：Kei-ichi Watanabe

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。