

令和 2 年 6 月 5 日現在

機関番号：13801

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2016～2019

課題番号：16K05097

研究課題名(和文)代数幾何学・表現論を駆使した非可換代数曲面の分類

研究課題名(英文) The classification of noncommutative algebraic surfaces using algebraic geometry and representation theory

研究代表者

毛利 出 (Mori, Izuru)

静岡大学・理学部・教授

研究者番号：50436903

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,500,000円

研究成果の概要(和文)：研究代表者は非可換代数幾何学の専門家であり、特に非可換射影空間の斉次座標環であるAS-regular代数のホモロジー代数的性質の研究と分類問題、また非可換射影曲面の重要な研究対象である非可換線織曲面の幾何学的性質の研究と分類問題とを主要な研究目標として研究してきました。本研究課題では代数幾何学や多元環の表現論の手法を駆使して、3次元AS-regular代数の分類問題、非可換射影空間の圏論的特徴づけ、非可換超曲面や非可換線織曲面の分類問題などに取り組み、大きな成果を上げました。

研究成果の学術的意義や社会的意義

非可換代数多様体の分類問題は、非可換代数幾何学の分野創設当初からの重要な研究課題であり、特に非可換射影空間や非可換射影曲面の分類問題は、現在にいたるまで欧米を中心として活発に研究されています。そのような状況の中この研究課題の成果はこれらの分類問題を大きく進展させたという意味で、学術的意義は大変高いものと考えられます。

研究成果の概要(英文)：My research field is noncommutative algebraic geometry. I have focused on homological properties and classification of AS-regular algebras, which are homogeneous coordinate rings of noncommutative projective spaces, and on geometric properties and classification of noncommutative ruled surfaces. In this research project, I made the progress on the classification of 3-dimensional AS-regular algebras, the categorical characterization of noncommutative projective spaces, and the classification of noncommutative hypersurfaces and noncommutative ruled surfaces, using techniques of algebraic geometry and representation theory of algebras.

研究分野：非可換代数幾何学

キーワード：環論 非可換代数幾何学 非可換射影空間 非可換射影曲面

1. 研究開始当初の背景

非可換代数幾何学は、約30年前に M. Artin らによって創設され、現在欧米を中心に活発に研究されています。大雑把に言って、非可換代数幾何学とは非可換代数(多元環)を代数幾何学的手法を用いて研究しようとする分野といえます。代数幾何学における重要な研究課題の一つは低次元代数多様体を分類することです。同様に非可換代数幾何学においても低次元非可換代数多様体を分類することが分野創設当初からの重要な研究課題となっています。実際非可換代数幾何学は非可換射影平面の斉次座標環である3次元 AS-regular 代数を代数幾何学を用いて分類しようとした M. Artin, J. Tate, M. Van den Bergh の論文[2]に始まり、非可換射影スキームの概念を定義し、その基本的性質を調べた M. Artin, J. J. Zhang の論文[3]によって確立されたといわれてよいでしょう。その後非可換射影曲線は M. Artin, J. T. Stafford[1]によって分類が完成されましたので、次なる目標は高次元非可換射影空間や非可換射影曲面を分類することであり、現在まで活発に研究されています。M. Artin は非可換射影曲面は(1)非可換射影平面、(2)非可換線織曲面、(3)中心上有限な曲面のいずれかと双有理同値であろうと予想しました。この予想自体は未解決ですが、これら3種類の曲面の研究は活発に行われています。研究代表者はこの分野が始まった約30年前からこの分野の研究に取り組んできた、いわばこの分野の草分け的研究者の一人であり、この分類問題にも大きく貢献してきました。

2. 研究の目的

近年源泰幸氏との共同研究[7]で非可換代数幾何学における重要な研究対象である AS-regular 代数と多元環の表現論における重要な研究対象である高次無限表現型多元環や高次前射影多元環との間に三角圏を介して密接な関係があることを示すことができました。また S. P. Smith 氏との共同研究[10]や上山健太氏との共同研究[12]で多元環の表現論で重要な役割を果たすポテンシャルの理論を3次元 AS-regular 代数の分類問題に応用しました。また最近代数幾何学の専門家である植田一石氏や大川新之介氏がモジュラー理論の観点から非可換代数幾何学に強い関心を持ち、研究代表者との共同研究を行っています。それらの動向を踏まえて本研究課題では、代数幾何学や多元環の表現論を非可換代数幾何学に応用するという新しい研究方法で非可換射影空間や非可換線織曲面を研究・分類することを主要目的としています。

3. 研究の方法

この研究課題を成功させるためには、まずこの研究課題に関係する可能性のある代数幾何学、多元環の表現論、可換環論といった他分野の知識・情報を幅広く収集することが重要でした。そのためにそれら他分野の専門家を静岡大学に招聘して講演してもらったり、またそれらの専門家の研究機関を訪問して研究打合せを行ったりするなどして、知識・手法などを多岐にわたって提供してもらい、その中から実際に研究課題遂行に役立つものを抽出し、解決の糸口が見つかった研究課題から順次取り組み、成果を上げました。また平成30年度・令和元年度と2度にわたりアメリカの西ワシントン大学を訪問し、非可換代数幾何学の専門家である Adam Nyman 氏と共同研究を行い大きな成果を上げることができました。またそれまでに得られた研究成果を順次国内外の学会などで発表し、本研究課題に対する評価を確認しながら論文にまとめて学術誌に投稿しました。

4. 研究成果

(1) 弘前大学の上山健太氏との共同研究で、AS-regular 代数の有限群による不変式環が Gorenstein, Koszul かつ孤立特異点を持つ場合、それ上の極大 Cohen-Macaulay 加群の圏の安定圏は tilting object を持ち、よってある有限次元多元環の導来圏と三角圏として同値になることを示しましたが、今回これらの研究成果を数学の学術誌のなかで大変評価の高い Adv. Math. に出版することができました[11]。

(2) Calabi-Yau AS-regular 代数はある potential の Jacobi 代数としてかけることが知られています。以前アメリカのワシントン大学の S. P. Smith 氏との共同研究で、3次元 quadratic Calabi-Yau AS-regular 代数に対応する potential を完全に分類することに成功していましたが、今回これらの研究成果を学術誌 Math. Z. に出版することができました[10]。その研究課題の継続として、弘前大学の上山健太氏との共同研究で、3次元 cubic Calabi-Yau AS-regular 代数の場合にも同様の分類を完成させ、学術誌 J. Pure Appl. Algebra に出版することができました[12]。またこれらの研究成果はカナダの Banff International Research Station で開催された Workshop “Bridges between Noncommutative Algebras and Algebraic Geometry” で招待講演をする機会が与えられるなど国際的にも高い評価を得ることができました。

(3) 代数幾何学において射影空間は最も基本的な多様体であり、その特徴づけは大変重要な研究課題ですが、弘前大学の上山健太氏との共同研究で、非可換射影空間の完全な圏論的特徴

づけを与えることに成功しました。これらの研究成果は学術誌 *J. Noncommut. Geom.* に掲載されることが確定しています[13]。またこれらの研究成果は英国のエジンバラ大学で開催された研究集会 “Linking Noncommutative Rings and Algebraic Geometry” で招待講演をする機会が与えられるなど国際的にも高い評価を得ることができました。その研究課題の継続として、アメリカの西ワシントン大学を2度にわたり訪問し同大学の Adam Nyman 氏と共同研究を行い、今まであまり研究されてこなかった AS-regular Z 代数を正式に定義し、局所双対定理などその基本的な性質を証明し、論文にまとめ学術誌に投稿しました[8]。

(4) 代数幾何学において射影空間の次に基本的な多様体の一つに射影超曲面がありますが、非可換射影超曲面に応用することを目的として、弘前大学の上山健太氏との共同研究で、非可換行列分解という概念を定義し、その基本的性質を研究しました。また可換超曲面の表現論で重要な役割を果たす Knorrer の周期性定理を非可換超曲面の場合に拡張することに成功し、次元が低い場合の極大 Cohen-Macaulay 表現の分類に成功しました。これらの研究成果は論文2本にまとめて学術誌に投稿しました[14][15]。またこれらの研究成果はアメリカのハワイ大学で開催された研究集会 “Interactions between Noncommutative Algebra and Noncommutative Algebraic Geometry” で講演することができました。

(5) 代数幾何学において射影平面の次に重要な曲面の一つは線織曲面ですが、東京大学の植田一石氏と大阪大学の大川新之介氏との共同研究で、射影直線上の非可換線織曲面として定義される非可換 Hirzebruch 曲面のモジュライ空間の研究を行い、それらの研究成果を論文にまとめました[9]。

(6) 非可換代数幾何学創設以来の最重要課題の一つである3次元 AS-regular 代数を分類するという研究課題を長年指導学生達と取り組んできましたが、ようやく3次元 quadratic AS-regular 代数の場合の完全な分類を完成させることができました。それらの研究成果は研究協力者である東京理科大学の板場綾子氏と指導学生の松野仁樹君によって論文3本にまとめて学術誌に投稿され、そのうちすでに論文2本の掲載が確定しています[4][5][6]。

<引用文献>

- [1] M. Artin and J. T. Stafford, Noncommutative graded domains with quadratic growth, *Invent. Math.* 122 (1995), 231-276.
- [2] M. Artin, J. Tate and M. Van den Bergh, Some algebras associated to automorphisms of elliptic curves, *The Grothendieck Festschrift 1*, Birkhauser (1990), 33-85.
- [3] M. Artin and J. J. Zhang, Noncommutative projective schemes, *Adv. Math.* 109 (1994), 228-287.
- [4] A. Itaba and M. Matsuno, Defining relations of 3-dimensional quadratic AS-regular algebras, *Math. J. Okayama Univ.*, to appear.
- [5] A. Itaba and M. Matsuno, AS-regularity of geometric algebras of plane cubic curves, preprint.
- [6] M. Matsuno, A complete classification of 3-dimensional quadratic AS-regular algebras of Type EC, *Canadian Math. Bull.*, to appear.
- [7] H. Minamoto and I. Mori, The structure of AS-Gorenstein algebras, *Adv. Math.* 226 (2011), 4061-4095.
- [8] I. Mori and A. Nyman, Local duality for connected Z -algebras, preprint.
- [9] I. Mori, S. Okawa and K. Ueda, Moduli of noncommutative Hirzebruch surfaces, preprint.
- [10] I. Mori and S. P. Smith, The classification of 3-Calabi-Yau algebras with 3 generators and 3 quadratic relations, *Math. Z.* 287 (2017), 215-241.
- [11] I. Mori and K. Ueyama, Stable categories of graded maximal Cohen-Macaulay modules over noncommutative quotient singularities, *Adv. Math.* 297 (2016), 54-92.
- [12] I. Mori and K. Ueyama, The classification of 3-dimensional Noetherian cubic Calabi-Yau algebras, *J. Pure Appl. Algebra* 223 (2019), 1946-1965.
- [13] I. Mori and K. Ueyama, A categorical characterization of quantum projective spaces, *J. Noncommut. Geom.*, to appear.
- [14] I. Mori and K. Ueyama, Noncommutative matrix factorizations with an application to skew exterior algebras, preprint.
- [15] I. Mori and K. Ueyama, Noncommutative Knorrer's periodicity theorem and noncommutative quadric hypersurfaces, preprint.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計8件（うち査読付論文 4件/うち国際共著 1件/うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Izuru Mori and Kenta Ueyama	4. 巻 223
2. 論文標題 The classification of 3-dimensional noetherian cubic Calabi-Yau algebras	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of Pure and Applied Algebra	6. 最初と最後の頁 1946 ~ 1965
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jpaa.2018.08.009	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Izuru Mori and S. Paul Smith	4. 巻 287
2. 論文標題 The classification of 3-Calabi-Yau algebras with 3 generators and 3 quadratic relations	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Math. Z.	6. 最初と最後の頁 215 ~ 241
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00209-016-1824-5	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する
1. 著者名 Izuru Mori	4. 巻 -
2. 論文標題 Noncommutative quotient singularities	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 第62回代数学シンポジウム報告集	6. 最初と最後の頁 10 ~ 15
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Izuru Mori and Kenta Ueyama	4. 巻 -
2. 論文標題 When is an abelian category a quantum projective space?	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Proceedings of the 50th Symposium on Ring Theory and Representation Theory	6. 最初と最後の頁 131 ~ 136
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Izuru Mori and Kenta Ueyama	4. 巻 297
2. 論文標題 Stable categories of graded maximal Cohen-Macaulay modules over noncommutative quotient singularities	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Adv. Math.	6. 最初と最後の頁 54-92
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.aim.2016.04.009	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Izuru Mori	4. 巻 -
2. 論文標題 m-Koszul AS-regular algebras and twisted superpotentials	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Proceedings of the 49th Symposium on Ring Theory and Representation Theory (Osaka, 2016)	6. 最初と最後の頁 92-95
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Izuru Mori and Kenta Ueyama	4. 巻 -
2. 論文標題 A categorical characterization of quantum projective spaces	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 J. Noncommut. Geom.	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Izuru Mori and Kenta Ueyama	4. 巻 -
2. 論文標題 Noncommutative matrix factorizations and noncommutative Knorrer's periodicity theorem	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Proceedings of the 52nd Symposium on Ring Theory and Representation Theory	6. 最初と最後の頁 73-80
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計14件（うち招待講演 7件 / うち国際学会 6件）

1. 発表者名 Izuru Mori
2. 発表標題 Noncommutative matrix factorizations
3. 学会等名 AMS Sectional Meeting “Interactions between Noncommutative Algebra and Noncommutative Algebraic Geometry”（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Izuru Mori
2. 発表標題 Noncommutative matrix factorizations
3. 学会等名 第20回岡山可換代数表現セミナー
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Izuru Mori
2. 発表標題 Tilting theory in noncommutative algebraic geometry
3. 学会等名 Higher homological algebra and cluster tilting（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Izuru Mori
2. 発表標題 A categorical characterization of a quantum projective space
3. 学会等名 ICMS Workshop “Linking noncommutative rings and algebraic geometry”（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Izuru Mori
2. 発表標題 Noncommutative quotient singularities
3. 学会等名 第62回代数シンポジウム(招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Izuru Mori and Kenta Ueyama
2. 発表標題 When is an abelian category a quantum projective space?
3. 学会等名 第50回環論および表現論シンポジウム
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Izuru Mori
2. 発表標題 Twisted superpotential入門
3. 学会等名 神楽坂代数セミナー(招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Izuru Mori and Kenta Ueyama
2. 発表標題 非可換射影空間の圏論的特徴付け
3. 学会等名 2018日本数学会年会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Izuru Mori
2. 発表標題 m-Koszul AS-regular algebras and twisted superpotentials
3. 学会等名 BIRS workshop “Bridges between Noncommutative Algebras and Algebraic Geometry” (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Izuru Mori
2. 発表標題 m-Koszul AS-regular algebras and superpotentials
3. 学会等名 The 49th Symposium on Ring Theory and Representation Theory
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Izuru Mori
2. 発表標題 McKay correspondence and Beilinson correspondence for AS-regular algebras
3. 学会等名 RIMS workshop “Non-commutative Crepant Resolutions, Ulrich Modules and Generalizations of the McKay Correspondence” (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Izuru Mori
2. 発表標題 Noncommutative matrix factorizations and noncommutative Knorrer's periodicity theorem
3. 学会等名 第24回静岡代数セミナー
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Izuru Mori
2. 発表標題 Noncommutative matrix factorizations and noncommutative Knorrer's periodicity theorem
3. 学会等名 第8回日中韓環論国際シンポジウム (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Izuru Mori and Kenta Ueyama
2. 発表標題 Noncommutative Knorrer's periodicity theorem
3. 学会等名 日本数学会2019年度秋季総合分科会
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計1件

1. 著者名 Izuru Mori (Editor)	4. 発行年 2019年
2. 出版社 みどり印刷株式会社	5. 総ページ数 161
3. 書名 Proceedings of the 51st Symposium on Ring Theory and Representation Theory	

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考