2版

様　式　C－19、F－19－1、Z－19　(共通)

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　 ２ 年　 ６ 月 ２９ 日現在

機関番号：１１６０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2016～2019
課題番号：１６Ｋ０５１１８
研究課題名（和文）不定値および例外型ツイスター理論の深化と融合

研究課題名（英文）Deepening and merging twistor theory for indefinite or exceptional structure groups

研究代表者
中田　文憲（NAKATA, Fuminori）

福島大学・人間発達文化学類・准教授

研究者番号：８０４６７０３４

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,000,000円

研究成果の概要（和文）：ツイスター理論のアイデアを結合的グラスマン多様体に関わる双ファイブレーションに適用することで，その幾何構造の解明を進めた．またG2リー環の具体的表示について研究し，その応用としてホップ写像の新しい表示を得た．またG2対称性を持つ等質空間に関する位相的性質について研究・整理した．これらの等質空間についてはムービングフレームを用いた幾何構造の具体的表示に成功し，さらに，これらの空間は結合的グラスマン多様体上の自己言及的ベクトル束を用いて統一的に表示することが可能であることを発見した．

研究成果の学術的意義や社会的意義
ツイスター理論は数理物理学に端を発し，幾何学においても非常に大きな成果をもたらした実りある理論であるが，本研究ではその新たな可能性を開拓することに貢献がなされたと考える．具体的には，等質空間の構造や複数の等質空間の関係について，ツイスター理論の観点・発想による新しい結果を複数得たとともに，総合的な視点に基づく新たな研究課題の創出に至った．

研究成果の概要（英文）：A double fibration concerning to the associative Grassmann manifold is studied via method of twistor theory, and its unknown geometric structure is studied. An explicit description of G2 Lie algebra is studied, and a new description of Hopf fibration is obtained as its application. Topological properties of homogeneous spaces with G2 symmetry is also studied. We succeeded to obtain an explicit description of geometric structures of such homogeneous spaces by making use of moving frame method. We also find that most of these homogeneous spaces are realized in terms of tautological vector bundle over the associative Grassmann manifold.

研究分野：微分幾何学

キーワード：ツイスター理論　複素幾何学　位相幾何学　等質空間

様　式　C－１９、F－１９－１、Z－１９（共通）

１．研究開始当初の背景

(1) 不定値計量のツイスター理論

Penrose によって創始された自己双対計量に関するツイスター理論は, その後様々な発展を見せた．中でも重要なのは，Atiyah-Hitchin-Singer によるリーマン幾何への展開，それを発端とするゲージ理論の大きな成功である．一方で LeBrun と Mason は不定値計量の幾何学におけるツイスター理論を開発し，これまでにない新しい幾何学を展開した．この理論はリーマン幾何のケースとは一味違った興味深い内容を含んでおり，不定値計量の幾何学に新たな研究動機を与えるものであるが，研究開始時点においてまだまだ未開拓であったと言える．

このような状況の中，研究代表者は研究開始以前に LeBrun-Mason 型ツイスター対応に関する研究を行っていた．捩じれのない Tod-鎌田計量が LeBrun-Mason 理論や，非コンパクト多様体上の LeBrun-Mason 型理論に関する幾つかの結果を得ていた．これらの研究の延長として，捩じれのある Tod-鎌田計量に関するツイスター理論の構築，また，それを踏まえた，より一般の非コンパクト不定値自己双対計量に関する理論を展開することが課題であった．

(2) ホロノミーの幾何学

リーマン接続のホロノミーの分類結果は Berge のリスト(Riemannian list)と呼ばれるが，Berge のリストには不定値計量まで拡張した metric list，さらに計量から定まらない torsion-free アファイン接続に関する non-metric list が存在する．現在のところ，Riemannian list に関しては多くの研究がなされているのに対し，metric list，non-metric list に関する研究は非常に少ない．

Riemannian list には G2 および Spin(7)が含まれるが，これらは八元数と関わる特殊な幾何構造に対応している．その不定値類似である非コンパクト型 G2 および Spin(3,4)は metric list に含まれており，これらも興味深い幾何構造に対応すると期待される．また，Bryant は non-metric list の中の例外的なもののひとつが Penrose 型のツイスター対応によって現れることを指摘しており, 上記の課題についても, ツイスター的アプローチによる研究が有効と期待された．

研究代表者は研究開始以前より橋本英哉氏（名城大）・大橋美沙氏（名工大）との共同研究を実施しており，その中で G2 幾何における Penrose 型ツイスター対応の類似物を既に確認していた．この対応はすでに Salamon や Bryant によって指摘されているものであるが，詳しい研究は行われておらず，この対応について詳細な研究を進めることが急務と考えられた．

２．研究の目的

１の(1)，(2)で述べた以下の二つの課題について研究を進めることが本研究の目的である．

A. 不定値計量のツイスター理論の深化
B. G2 や Spin(3,4)ホロノミーに関わる幾何学へのツイスター的アプローチによる研究

より具体的には以下の項目が挙げられ，これらについて順次研究を進める．

A-1：捩じれのある Tod-鎌田計量に関するツイスター理論の構築
A-2：より一般の不定値自己双対計量に関するツイスター理論の展開

B-1：G2 幾何におけるツイスター理論の展開
B-2：Spin(7)幾何におけるツイスター理論の展開
B-3：変形理論の実現, (さらに余裕があれば)非コンパクト型 G2，Spin(3,4)幾何の展開

LeBrun-Mason 理論は不定値計量の幾何学に新たな可能性を切り拓いたが，まだまだ未開拓であると言える．また G2 幾何，Spin(7)幾何へのツイスター的アプローチによる研究はほとんど行われておらず，いずれも研究価値が高い．特にツイスター理論の視点から各理論を対比し，将来的に融合することを目指すという点が将来的な大きな目標である．

３．研究の方法

(1) これまでの研究結果・手法の融合

２のA・Bの理論は直接的な関係は期待できないものの，ツイスター理論のアイデアを基礎として, 類似したアプローチが有効と考えられたため, 従って平行して研究を進めることが理想的と考えられる．また，非コンパクト型 G2，Spin(3,4)幾何の研究が進めば，A・Bの理論は不定値計量のツイスターという枠組みの中で，統一的に扱うことが可能になると期待される．

この考えのもと，研究代表者がこれまでに得ている結果を深化・融合させることで，２のA-1 か

ら B-3 の課題に，優先順位の高い順に取り組む方法をとった．

(2) 共同研究の実施

- 研究開始以前から G2 および Spin(7)幾何が専門である橋本英哉氏（名城大）・大橋美沙氏（名工大）との共同研究を行なっていたが，さらに Lie 環論が専門である間下克哉氏（法政大）にも共同を要請することとし，共同研究の推進を強化した．
- また，ねじれた Tod-Kamada 計量に関するツイスター対応の構成については，鎌田博行氏(宮城教育大)との議論を行った．
- 研究初期において双曲幾何学との関連が見え始め，専門家との意見交換を通して新たな研究の可能性を探ることができた．

(3) 研究集会の開催

- 平成 28 年 6 月に会津幾何学研究集会（於 鶴城コミュニティセンター）を開催し，特に G2 幾何に関する研究を推進した．
- 平成 30 年 6 月に福島幾何学研究集会（於 コラッセふくしま）を開催した．共同研究者である間下氏をはじめ，本研究課題に直接関わる内容の研究者に講演を依頼した他，等質空間論や曲面論の分野についても講演者を招聘し，参加者は 18 名であった．
- 平成 31 年 10 月に福島幾何学研究集会（於 Pentonote スタディルーム）を小規模にて開催した．共同研究者である大橋氏・橋本氏・間下氏の他，数名の参加者によるクローズドな研究集会により，特に G2 幾何に関する研究を推進した．

(4) 研究発表および研究集会への参加

研究期間を通して多くの研究集会に出席し，研究発表や，研究交流を積極的に行った．

４．研究成果

(1) G2/SO(4)上の幾何構造の解明

$$\begin{tikzcd} & G_2/U(2)_- \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ G_2/SU(3) & & G_2/SO(4) \end{tikzcd}$$

右図の双ファイブレーションを Penrose 型のツイスター理論の類似として扱う発想は研究開始時点から注目していたが，その対応の具体的内容についてさらに詳しく明らかにした．

特に，結合的グラスマン多様体 G2/SO(4)上には特徴的な錐場が存在し，さらにその錐場は特別な対称 3-形式によって特徴付けられることがわかった．この対称 3-形式は Penrose 理論における時空の重力場(複素計量)に相当するものであり，自己双対性に類似する可積分性を持つことがわかった．さらに変形理論などへの議論の深化を期待させるものであり，今後のさらなる発展へと繋がる結果と言える．この結果については 2020 年に京都大学数理解析講究録にて発表した．

(2) G2 リー環の表示と Hopf 写像に関する研究

G2 リー環の表示や，その応用について研究をおこなった．G2 リー環の具体的な表示としては Bryant による複素フレームを用いたものがあるが，複素では捕らえられない幾何学を詳しく研究するためには実フレームを用いた表示が必要と考えられたため，研究を進めた．結果として具体的な G2 リー環の実フレームによる表示が得られ，また応用として 7 次元球面から 4 次元球面への Hopf ファイブレーションの新しい表示を得ることができた．

この結果は特に主曲率 6 種の特質等径超曲面の理論と関連していると考えられ，応用などを模索したが，新しい結果は得られていない．この成果については論文としては発表していないものの，口頭での発表を複数行った．

この研究の中で，G2/SO(4)の幾何構造が，本質的に，より次元の低い対称空間 SU(3)/SO(3)の構造と本質的に類似していることをつきとめた．このことから SU(3)/SO(3)についても Penrose 型ツイスター対応が存在すると期待され，新たな研究課題が見つかったとともに，これまでの研究課題の解決のための糸口がさらに明確になったといえる．

(3) G2 対称性を持つ等質空間の位相的性質の解明

二つの類似した等質空間 G2/U(2)+および G2/U(2)-の位相構造について研究した．これらが位相同形でないことは一般に知られている結果であるが，明確に説明的に書かれている文献が存在しない．本研究ではこれらの空間のホモトピー群を計算し，両者が位相同型でないことを証明した．また，G2/Sp(1)+および G2/Sp(1)-でも同様であることを指摘した．この結果は単著論文としてまとめ，発表した．

(4) G2 対称性を持つ等質空間の構造に関するムービングフレームを用いた具体的表示

橋本英哉氏，大橋美沙氏，間下克哉氏との共同研究を通し，等質空間 G2/Sp(1)+の 3-Sasakian 構造や，G2/U(2)-の複素接触構造についてムービングフレームメソッドによる表示を行うことに成功した．さらに G2/U(2)+の超ケーラー構造についても研究を進めている．特に，G2/U(2)+を複素化して，複素 G2 の部分群 H による商として表示する際の，部分群 H を多様体として具体的に表示することを検討している．同様の理論は G2/U(2)-上は Bryant や橋本英哉氏によって研究されており，S6 上の super minimal complex surface の理論などへの応用があるため，類似するような応用を視野に入れている．この結果については現在論文を準備中である．

(5) 自己言及的ベクトル束を用いた統一的表示の発見

G2 対称性を持つ様々な等質空間が，結合的グラスマン多様体 G2/SO(4)上の自己言及的ベクトル束（トートロジカルベクトルバンドル）を用いて統一的に記述できることを発見した．この結果については複数の研究集会等で発表を行なっている．

研究当初は研究成果(1)に述べた Penrose 型ツイスター対応に注目するのみであったが，ここに至り，より大きな図式を考えることの重要性がはっきりしてきたと言える．G2 対称性を持つ様々な等質空間について，個別の空間に関する研究には多くの先行研究が存在するが，それらをより大きな図式の中で捉え，複数の投資空間の構造の関係をさらに詳しく解明することは，今後の新たな課題として挙げられる.自己言及的ベクトル束を用いた統一的表示は，このように大きな図式で物事をとらえるための第一歩であると考えられる．

この成果は，本研究を通して追求してきた G2 幾何におけるツイスター理論の新しい可能性について，極めて具体的な示唆を与えるものであると考えられ，次なる研究課題を切り開くものであると考えている．

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計2件（うち査読付論文　1件／うち国際共著　0件／うちオープンアクセス　0件）

１．著者名 Fuminori Nakata	４．巻 1
２．論文標題 Homotopy groups of G2/Sp(1) and G2/U(2)	５．発行年 2018年
３．雑誌名 Contemporary Perspectives in Differential Geometry and its Related Fields	６．最初と最後の頁 151～159
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

１．著者名 Fuminori Nakata	４．巻 2145
２．論文標題 The Penrose type twistor correspondence for the exceptional simple Lie group G2	５．発行年 2020年
３．雑誌名 数理解析研究所講究録	６．最初と最後の頁 54-68
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

〔学会発表〕　計9件（うち招待講演　6件／うち国際学会　1件）

１．発表者名 中田文憲
２．発表標題 G2リー環の表示とHopf写像
３．学会等名 研究集会「多様体上の微分方程式」（金沢）（招待講演）
４．発表年 2017年

１．発表者名 中田文憲
２．発表標題 G2リー環の表示とHopf写像
３．学会等名 淡路島幾何学研究集会2018
４．発表年 2018年

1．発表者名 中田文憲
2．発表標題 G2/SO(4) に関するツイスター対応
3．学会等名 会津幾何学研究集会
4．発表年 2016年

1．発表者名 中田文憲
2．発表標題 Penrose type twistor correspondence for G_2/SO(4)
3．学会等名 Quaternionic differential geometry and related topics（招待講演）（国際学会）
4．発表年 2016年

1．発表者名 中田文憲
2．発表標題 Penrose type twistor correspondence for G_2/SO(4)
3．学会等名 幾何／数理物理学合同セミナー（招待講演）
4．発表年 2016年

1．発表者名 中田文憲
2．発表標題 G_2対称性とツイスター対応
3．学会等名 名城大学幾何学研究集会（招待講演）
4．発表年 2017年

1．発表者名 中田文憲
2．発表標題 G_2/SO(4) に関するペンローズ型ツイスター対応
3．学会等名 第24回沼津研究会（招待講演）
4．発表年 2017年

1．発表者名 中田文憲
2．発表標題 例外型単純Lie群G2に関するPenrose型ツイスター対応について
3．学会等名 RIMS共同研究「部分多様体論の諸相と他分野との融合」（招待講演）
4．発表年 2019年

1．発表者名 中田文憲
2．発表標題 G2/SO(4)上のファイバー束とその性質
3．学会等名 淡路島幾何学研究集会2020
4．発表年 2020年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

6．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考
研究協力者	橋本　英哉 (Hashimoto Hideya)	名城大学 (33919)	

６．研究組織（つづき）

	氏名 （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考
研究協力者	大橋　美沙 (Ohashi Misa)	名古屋工業大学 (13903)	
研究協力者	間下　克哉 (Mashimo Katsuya)	法政大学 (32675)	