

令和元年6月3日現在

機関番号：14401

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2016～2018

課題番号：16K05130

研究課題名(和文)コンパクト等質空間上の不変なアインシュタイン計量の探究

研究課題名(英文)Study of invariant Einstein metrics on compact homogeneous spaces

研究代表者

坂根 由昌 (sakane, yusuke)

大阪大学・その他部局等・名誉教授

研究者番号：00089872

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,900,000円

研究成果の概要(和文)：コンパクト等質空間上の不変なアインシュタイン計量に関して、単純リー群および Stiefel 多様体を中心に研究を行なった。D'Atri と Ziller は、1979 年にコンパクト単純リー群上に naturally reductive なアインシュタイン計量を多く構成したが、これ以外のアインシュタイン計量は存在するかという問題を提出した。この問題について研究した。特に、特殊ユニタリー群  $SU(n)$  に関して、一般化された旗多様体および一般化された Wallach 空間を用いて、新しいアインシュタイン計量の存在を示した。また、Stiefel 多様体についても、新しいアインシュタイン計量の存在を示した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

D'Atri と Ziller の提出したアインシュタイン計量の存在問題に関して、本研究により、未解決であった  $SU(5)$  の場合が解決し、残りは  $SU(3)$ ,  $SU(4)$ ,  $SO(5)$  の 3 つの場合になった。これまでは、アインシュタイン計量を調べるためのリッチテンソルの形は、対角化されていたが、本研究では、対角成分以外の成分を調べる方法が必要となり、これを含めて研究し、成果を得ることができた。また、Stiefel 多様体についても、閉部分群をうまく取り不変な計量の範囲を適当なものにすることにより新しいアインシュタイン計量の存在を示せた点に学術的意義がある。

研究成果の概要(英文)：For invariant Einstein metrics on compact homogeneous spaces, the cases of simple Lie groups and Stiefel manifolds are mainly studied. In 1979 D'Atri and Ziller investigated naturally reductive Einstein metrics on compact Lie groups and produced a large number of such Einstein metrics. They also asked whether there exist Einstein metrics on compact Lie groups that are not naturally reductive.

We have worked here these problems. We have shown the existence of new Einstein metrics on  $SU(n)$  which are not naturally reductive, by using generalized flag manifolds and generalized Wallach spaces. We have also shown the existence of new Einstein metrics on Stiefel manifolds.

研究分野：幾何学

キーワード：等質アインシュタイン計量 コンパクト単純リー群 Stiefel 多様体 リッチテンソル グレブナー基底  
一般化された旗多様体 一般化された Wallach 空間

## 様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

(1) アインシュタイン計量をもつ等質空間は大きく3つの場合に分かれる。すなわち、リッチテンソルが正、ゼロ、負の場合である。リッチテンソルが正のとき、等質空間はコンパクトで基本群は有限となり、標準的な計量を持つ球面、複素射影空間などのコンパクト型の既約対称空間は、この場合の典型的な例である。リッチテンソルが0のときは、等質空間上の不変なアインシュタイン計量は平坦となる。リッチテンソルが負のときは、作用するリー群は非コンパクトである。今までに知られている非コンパクト等質空間上の左不変なアインシュタイン計量は、すべて可解リー群上の左不変計量として表されている。したがって、コンパクト等質空間上のアインシュタイン計量の研究では、リッチテンソルが正の場合を考察することになる。

(2) 一般に、等質空間上にいつ不変なアインシュタイン計量が存在するかは未解決の問題である。コンパクト等質空間上に不変なアインシュタイン計量が存在しない最初の例は、Wang と Ziller により 1986 年に見いだされた。彼らが構成した例の中で次元が一番小さいものは 12 次元である。2006 年に Bohm と Kerr により、11 次元以下のコンパクト単連結等質空間に対しては、不変なアインシュタイン計量の存在が示された。

(3) 2004 年に Bohm、Wang と Ziller により、等質空間上の不変なアインシュタイン計量のモデュライ空間の連結成分は有限で、各連結成分はコンパクトであることが示された。さらに、Bohm、Wang と Ziller は  $\text{rank } G = \text{rank } K$  のとき、等質空間  $G/K$  上の不変なアインシュタイン計量は有限個であると予想している。このような空間の例としては一般化された旗多様体がある。一般化された旗多様体に対して、次の場合はこの予想は肯定的である事が知られている。

- (i) 一般化された旗多様体で等方部分群による既約分解の既約成分の個数が 5 個以下のもの
- (ii) 一般化された旗多様体の等方部分群による既約分解の様子は、 $t$ -ルートで表すことが出来るが、 $t$ -ルートが  $G_2$  型のルート系となる一般化された旗多様体
- (iii) 一般化された旗多様体で、第 2 ベッチ数が 1 であるもの

(4) Stiefel 多様体  $S_0(n)/S_0(q)$  上には、Jensen により構成された不変なアインシュタイン計量の存在がよく知られている。Arvanitoyeorgos, Dzhepko と Nikonorov は、一般化された Wallach 空間を利用して、ある種の Stiefel 多様体上に、Jensen による計量とは異なるアインシュタイン計量を構成した。また、Arvanitoyeorgos, Sakane と Statha は、これの拡張として、Stiefel 多様体  $S_0(n)/S_0(n-4)$  ( $n > 5$ ) の場合に新しいアインシュタイン計量を構成した。

(5) 1979 年に、D'Atri と Ziller は、コンパクトリー群上の左不変なリーマン計量がいつ naturally reductive となるかを調べ、コンパクト単純リー群の場合には、このような計量を特徴付けた。コンパクト型の既約対称空間、さらに一般に、等方部分群が既約に作用する場合を利用して、コンパクト単純リー群上の多くの naturally reductive な左不変アインシュタイン計量を構成した。さらに、コンパクト半単純リー群上には、naturally reductive でない左不変アインシュタイン計量があるのかという問題を提出した。この問題は、1994 年の森による先駆的な研究があるが、Arvanitoyeorgos, Mori と Sakane の研究、Chen と Liang の研究、Chrysikos と Sakane の研究などにより、多くのコンパクト単純リー群上に、naturally reductive でない左不変アインシュタイン計量が存在することを示されている。

### 2. 研究の目的

(1) D'Atri と Ziller により提出された、コンパクト半単純リー群上には、naturally reductive でない左不変アインシュタイン計量があるのかという問題に関して、森邦彦は、コンパクト単純リー群  $SU(n)$  ( $n > 5$ ) 上には、naturally reductive でない左不変アインシュタイン計量が存在することを示した。Arvanitoyeorgos, Mori と Sakane は、一般化された旗多様体で、第 2 ベッチ数が 1 で既約成分の個数が 2 個であるものを利用することにより、多くのコンパクト単純リー群上に naturally reductive でない左不変アインシュタイン計量が存在することを示した。また、Chrysikos と Sakane は例外リー群に対して、第 2 ベッチ数が 1 で既約成分の個数が 3 個であるものを用いて、同様の結果を得ている。Arvanitoyeorgos, Sakane と Statha は、一般化された Wallach 空間を利用することにより、 $S_0(n)$  ( $n > 6$ ) および  $Sp(n)$  ( $n > 2$ ) 上に新しい naturally reductive でない左不変アインシュタイン計量を構成した。以上の結果より、未解決なコンパクト単純リー群は、 $SU(3)$ ,  $SU(4)$ ,  $SU(5)$ ,  $S_0(5)$  であるが、これらについて、naturally reductive でない左不変アインシュタイン計量が存在するかを研究する。

(2) Stiefel 多様体  $S_0(n)/S_0(q)$  上の不変なアインシュタイン計量については、Jensen の研究、Arvanitoyeorgos, Dzhepko と Nikonorov の研究、Arvanitoyeorgos, Sakane と Statha の研究があるが、どのくらい多くの不変なアインシュタイン計量が存在するかは、未解決である。また、対  $(n, q)$  ( $n > q > 2$ ) を与えるとき、Stiefel 多様体  $S_0(n)/S_0(q)$  上に Jensen により構成された不変なアインシュタイン計量以外にアインシュタイン計量が存在するかも未解決である。これら問題を解決することを目的とする。また、複素 Stiefel 多様体  $SU(n)/SU(q)$  および四元数 Stiefel 多様体  $Sp(n)/Sp(q)$  上に、Jensen の研究したアインシュタイン計量以外に不変なア

インシュタイン計量が存在するかを研究する。

### 3. 研究の方法

(1) コンパクト等質空間  $G/H$  が、次の条件を満たすとする：等方部分群  $H$  の接空間への作用を既約分解するとき、それぞれの既約成分は互いに同値でない。このとき、等質空間  $G/H$  上の不変リーマン計量は、既約成分の個数だけのパラメータを持つが、リッチテンソルは対角化され、成分によりリッチテンソルが定まる。両側不変リーマン計量により定まる Wang と Ziller によるシンボルを用いると、リッチテンソルの成分を書き表すことができる。この方法は、コンパクト単純リー群  $G$  の左不変計量が  $\text{Ad}(H)$  不変で、等方部分群  $H$  のリー環の中心の次元が 1 以下の場合にも適用できる。リッチテンソルの成分を決定できれば、不変なインシュタイン計量を持つ条件は、多変数の代数方程式が正の解を持つことと同値である。方程式を解くために、グレブナー基底を計算する。このためには、コンピュータによる計算が必要である。解の個数が有限個の場合には、グレブナー基底の中に一変数の多項式が存在するので、これを利用する。

(2) Stiefel 多様体  $G/H = \text{SO}(n)/\text{SO}(q)$ , 複素 Stiefel 多様体  $G/H = \text{SU}(n)/\text{SU}(q)$ , 四元数 Stiefel 多様体  $G/H = \text{Sp}(n)/\text{Sp}(q)$  上の不変計量の空間全体からインシュタイン計量を探すことは難しいので、等方部分群  $H$  を含む大きな閉部分リー群  $K$  で不変計量の中からインシュタイン計量を探す方法を取る。  $K$  が  $H$  と他の閉部分リー群  $L$  との直積で、等質空間  $G/K$  の等方部分群  $K$  の接空間への作用を既約分解するとき、それぞれの既約成分は互いに同値でないとすると、等質空間  $G/H$  上の  $\text{Ad}(K)$  不変リーマン計量は既約成分の個数だけのパラメータを持つことになり、(1) と同様の方法が適用できる。

(3) コンパクト単純リー群  $\text{SU}(n)$  上の左不変インシュタイン計量を構成するためには、一般化された旗多様体  $\text{SU}(n)/\text{S}(\text{U}(k) \times \text{U}(l) \times \text{U}(m))$  を用いることが考えられるが、この場合には、等方部分群の中心の次元が 2 であるために、中心に対応するリッチテンソルの成分は対角化されていない。インシュタイン計量となるための条件を書き下すために、Wang と Ziller によるシンボルを拡張する。対角成分を含むリッチテンソルの成分を決定した後、(1) と同様に、方程式を解くために、グレブナー基底を計算する。

### 4. 研究成果

(1) コンパクト半単純リー群上には、naturally reductive でない左不変インシュタイン計量があるのかという問題に関して、一般化された旗多様体  $\text{SU}(5)/\text{S}(\text{U}(1) \times \text{U}(2) \times \text{U}(2))$  を用いて、コンパクト単純リー群  $\text{SU}(5)$  上には、naturally reductive でない左不変インシュタイン計量が存在することを示した。さらに、森邦彦による 1994 年の結果を、一般化された旗多様体  $\text{SU}(n)/\text{S}(\text{U}(p) \times \text{U}(q) \times \text{U}(r))$  ( $n = p + q + r$ ) を用いて拡張し、コンパクト単純リー群  $\text{SU}(n)$  ( $n > 5$ ) 上にも、新しい naturally reductive でない左不変インシュタイン計量が存在することを示した。この結果を合わせると、D'Atri と Ziller の問題が未解決なコンパクト単純リー群は、 $\text{SU}(3)$ ,  $\text{SU}(4)$ ,  $\text{SO}(5)$  になっている。さらに、複素 Stiefel 多様体  $\text{SU}(n)/\text{SU}(r)$  上に新しい不変なインシュタイン計量が存在することも示した。これらの成果を、Tohoku Mathematical Journal に投稿し、掲載決定になっている。

(2) 一般化された旗多様体  $\text{Sp}(n)/(\text{U}(n-q) \times \text{Sp}(q))$  を用いて、研究の方法 (2) の手法を用いることにより、四元数 Stiefel 多様体  $\text{Sp}(n)/\text{Sp}(q)$  ( $1 < q < (3/4)n-1$ ) 上に新しい不変なインシュタイン計量が存在することを示した。この結果は、Advances in Geometry に掲載されている。

(3) 等質空間  $\text{SU}(m+n)/\text{S}(\text{SO}(m) \times \text{U}(1) \times \text{U}(n))$  を用いて、研究の方法 (2) の手法を用いることにより、 $m > 5$  で  $m > (n/2) - 1$  のとき、複素 Stiefel 多様体  $\text{SU}(m+n)/\text{SU}(n)$  上には、Jensen の研究したインシュタイン計量以外に少なくとも 2 個のインシュタイン計量が存在することを示した。さらに、 $\text{SU}(3+n)$  ( $n > 4$ ) 上に naturally reductive でない左不変インシュタイン計量が存在することを示した。

(4) 一般化された旗多様体  $\text{SO}(n)/(\text{U}(p) \times \text{SO}(n-2p))$  を用いて、研究の方法 (2) の手法を用いることにより、Stiefel 多様体  $\text{SO}(n)/\text{SO}(n-2p)$  ( $1 < p < (2/5)n$ ) 上に新しい不変なインシュタイン計量が存在することを示した。

(5) 一般化された Wallach 空間  $\text{SU}(2n)/\text{U}(n)$  を用いて、研究の方法 (1) の手法により、コンパクトリー群  $\text{SU}(2n)$  ( $n > 2$ ) 上に naturally reductive でない左不変インシュタイン計量が存在することを示した。また、一般化された Wallach 空間を用いる方法では、 $\text{SU}(4)$  上のインシュタイン計量は naturally reductive となることを示した。

## 5 . 主な発表論文等

### [ 雑誌論文 ] ( 計 2 件 )

Arvanitoyeorgos, Y. Sakane and M. Statha, Invariant Einstein metrics on  $SU(n)$  and complex Stiefel manifold (掲載決定), Tohoku Mathematical Journal, 査読有  
Arvanitoyeorgos, Y. Sakane and M. Statha, New homogeneous Einstein metrics on quaternionic Stiefel manifolds, Advances in Geometry, 査読有, 18, (2018), 509 - 524  
DOI: dx.doi.org/10.1515/advgeom-2018-0014

### [ 学会発表 ] ( 計 9 件 )

坂根由昌, Homogeneous Einstein metrics on Stiefel manifolds, The 6<sup>th</sup> meeting ICDG (International Colloquium on Differential Geometry), 2018  
坂根由昌, Invariant Einstein metrics on Stiefel manifolds, The 5<sup>th</sup> workshop “Complex Geometry and Lie Group”, 2018  
坂根由昌, コンパクト等質空間上の不変なアインシュタイン計量について, 第25回沼津改め静岡研究会, 2018  
坂根由昌, コンパクト等質空間上のアインシュタイン計量について, 山口佳三先生退職記念研究集会, 2017  
坂根由昌,  $SU(n)$ 上の等質アインシュタイン計量について, 日本数学会年会, 2017  
坂根由昌, コンパクト等質空間上のアインシュタイン計量について, 小磯憲史先生退職記念研究集会, 2017  
坂根由昌, コンパクト単純リー群上の不変なアインシュタイン計量について, 第24回沼津研究会, 2017  
坂根由昌, コンパクト単純リー群上の不変なアインシュタイン計量について, 多様体上の計量と幾何構造, 2017  
坂根由昌, New homogeneous Einstein metrics on  $SU(n)$ , ICDG2016, 2016

### [ 図書 ] ( 計 2 件 )

A. Arvanitoyeorgos, Y. Sakane and M. Statha, Einstein metrics on special unitary groups  $SU(2n)$  (掲載決定), Recent Topics in Differential Geometry and its Related Fields, Proceedings of the 6th International Colloquium on Differential Geometry and its Related Fields, 査読有, World Sci. Publ., 2019, 240pp ( p.1 - p.22 )  
A. Arvanitoyeorgos, Y. Sakane and M. Statha, Homogeneous Einstein metrics on complex Stiefel manifolds and special unitary groups, Contemporary Perspectives in Differential Geometry and its Related Fields, Proceedings of the 5th International Colloquium on Differential Geometry and its Related Fields, 査読有, World Sci. Publ., 2017, 192pp ( p.1 - p.20 )  
DOI: dx.doi.org/10.1142/9789813220911\_0001

### [ その他 ]

ホームページ等

<http://www4.math.sci.osaka-u.ac.jp/~sakane/>

## 6 . 研究組織

### (2)研究協力者

研究協力者氏名 : Arvanitoyeorgos Andreas

ローマ字氏名 : Arvanitoyeorgos Andreas

研究協力者氏名 : Statha Marina

ローマ字氏名 : Statha Marina

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。