

令和元年6月14日現在

機関番号：12102

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2016～2018

課題番号：16K05141

研究課題名(和文)位相空間論と連続体論を用いたカオス力学系の幾何構造の研究

研究課題名(英文) Study of geometric structures of chaotic dynamical systems by use of general topology and continuum theory

研究代表者

加藤 久男 (Kato, Hisao)

筑波大学・数理解物質系・教授

研究者番号：70152733

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,600,000円

研究成果の概要(和文)：2002年、Blanchard等は「正のエントロピーは Li-Yorke のカオスを導く」を証明して大きなブレイクスルーとなった。2017年に研究代表者は共同研究で、正のエントロピーをもつ同相写像を許容するグラフ・ライクな連続体は indecomposable 連続体を含むという定理の証明に成功した。さらに2018年に研究代表者は、この成果を発展させてグラフ・ライク連続体上ではBlanchardの結果と空間の indecomposability を融合した全く新しい幾何学的かつ力学的構造定理が得られることを示した。これらの結果は力学系・幾何学的トポロジーの重要な結果となった。

研究成果の学術的意義や社会的意義

これまでコンピューターによる数値実験などから、多くの具体的なカオスが研究されてきた。こうした実験により出現したストレンジ・アトラクターなどの不変集合は、大変複雑な幾何構造をなしている場合が多い。そうした複雑なコンパクト距離空間の幾何構造・力学的構造はたいへん興味深い研究対象である。研究代表者は長年、幾何学的トポロジー・連続体論において空間の複雑性を研究してきた。本研究では幾何学的トポロジーの見地から、特に連続体論・位相空間論の見地から力学系におけるカオスの幾何構造を研究した。こうした力学的構造と幾何構造を理論的かつ統一的に解明できることは本研究の大きなメリットである。

研究成果の概要(英文)：In 2002, Blanchard and other authors proved "a positive entropy map implies Li-Yorke's chaos" and the result became a major breakthrough in dynamical systems. In a joint research in 2017, I and Darji succeeded in proving the theorem that graph-like continua admitting homeomorphisms with positive entropy contain indecomposable subcontinua. The result was only existence theorem of indecomposable subcontinua. Furthermore, in 2018, I developed this result and showed that on a graph-like continuum, an entirely new geometric and dynamical structure theorem can be obtained, which combines the results of Blanchard with the indecomposability of space. To prove this result, I introduced a new notion of free-tracing property by free chains. Also, by use of the new notion, I obtained a characterization theorem of graph-like continua containing indecomposable subcontinua. These results are important results of dynamical systems and geometric topology, in particular continuum theory.

研究分野：数物系科学

キーワード：力学系 幾何学的トポロジー カオス エントロピー アトラクター 分解不可能性 フラクタル次元

### 1. 研究開始当初の背景

本研究に関連する国内外の研究は、主にアメリカ、カナダ、東欧、中国などで活発に行われてきた。また日本での研究は、力学系研究グループ及びジェネラルトポロジー・グループを中心に活発に研究されている。1994年、Barge等はグラフ上の写像の逆極限とシフト写像という制限された条件の下で、以下の3つの条件：正のエントロピー、horse shoeの存在、indecomposabilityの存在が同値であることを証明した。またKennedy, Yorkeは多様体の力学系に現れる複雑なトポロジー、特にindecomposabilityの研究を長年続けている。2002年、Blanchard等はこの方面の長年の予想「正のエントロピーはLi-Yorkeのカオスを導く」を証明して大きなブレイクスルーとなった。2011年、Mouronはarc-likeの場合に、正のエントロピーがindecomposabilityを導くことを証明している。また近年、局所エントロピー理論がBlanchard, Ye, Kerr, Liなどの研究により大きく発展し、現在エントロピー理論の新局面を迎えている。研究代表者は、主に連続写像の位相力学的性質の研究を行ってきた。特に、transitive, sensitive, chaos of Li-Yorke and Devaney, 正のエントロピーを持つ写像、拡大同相写像、連続体的同相写像などの研究を行ってきた。拡大的力学系とは、微少な観測値の相違が過去または未来のある時刻に明確な違いとなって現れる力学系のことで、位相力学系・エルゴート理論では特に重要な概念である。連続体的拡大同相写像の概念は拡大同相写像とパイコね変換を一般化したものであり、研究代表者によって導入された。これまでの研究で拡大同相写像の存在に関する一連の定理として、カオス連続体の存在定理、平面内のカオス連続体のindecomposable構造に関する定理を証明した(Fund. Math., Trans. AMS., Topology Appl., Pacific J. Math., Canad. J. Math., 岩波数学辞典(4版))。Indecomposabilityは連続体論の中心的課題としてKnaster, Kuratowski, Bingなどによって研究された重要な概念である。近年、力学的複雑さが幾何学的な複雑となって現れる典型的な構造として、このindecomposabilityが注目されその重要性が認知されている。多くの場合、不安定集合とindecomposable連続体のcomposantが一致する構造となって出現する。研究代表者は、位相エントロピーの評価からhereditarily indecomposable continua上には、拡大同相写像は存在しないことを証明した(Proc. AMS)。また、空間の位相次元とbox-counting dimensionとの関係を最終的に決定する距離の構成に成功し、空間の距離の構造とbox-dimensionとの関係を完全に決定する定理を得た(J. Math. Soc. Japan)。ランダムな無限点列を可算個与えると、それを正確に実現する力学系が測度保存力学系全体の中で稠密に存在していることを示した。つまり、エネルギーが保存されている力学系では任意の可算個の点列は、現在の状態をほんの少し変化させるだけで少しの狂いもなく実現可能であることを証明した。同様の結果がflowにおいても成立することを証明した(Topology Appl.)。つまり、この世界では想定外の事象は存在しない。全ての事象が起こり得ることを数学的に証明したものである。また研究代表者はフラクタル幾何学と連続体論で重要なregular curve上のpiecewise embedding mapsに関する位相エントロピーの計算公式を得ている。区間の場合は、Misiurewicz-SzlenkおよびYoungのラップ数による表現定理として著名であるが、我々の結果は彼等の結果を区間からある種のフラクタル集合上に拡張した定理である(Ergodic Theory and Dynamical Systems, Topology Appl., Topology Proc.)。

### 2. 研究の目的

本研究の目的は、カオス力学系に出現する複雑な不変集合の力学的構造と幾何構造を解明することである。「力学系のカオス(軌道の複雑性)は、なぜ幾何学的構造の複雑性を導くのか」という根本的な問題に解答を与えることである。そのために本研究では、コンパクト距離空間とその上の連続写像の力学的・幾何学的性質を、位相空間論・幾何学的トポロジー(特に連続体論)と位相力学系理論およびエルゴート理論などを駆使して総合的に研究していく。数値計算によってコンピューター上に出現するストレンジ・アトラクターなどの不変集合は、大変複雑な幾何構造をなしている場合が多く、そうした複雑なコンパクト距離空間の幾何構造・力学的構造はたいへん興味深い研究対象である。こうした力学的構造と幾何構造を理論的かつ統一的に解明することを研究目的とする。

### 3. 研究の方法

本研究の学術的な特色・独創的な点は、コンパクト距離空間とその上の連続写像という非常に一般的な研究対象を、幾何学的トポロジー(特に、連続体論)位相空間論、力学系理論およびエルゴート論を駆使して総合的に研究することである。位相力学系、連続体論および位相空間論の方法論を融合して可分距離空間上の力学系の原理的な構造の解明に役立てていきたい。特に位相空間論からの研究という基本原理に立ち返った研究方法は、本研究の大きな特色でもある。位相空間論は、対象とする空間の種々の問題を最も理想的・抽象的な形で設定するための概念・手法を提供する。最も基本的な原理原則からの本質を見極めた研究が可能となる大きな利点をもつ。本研究の予想される結果と意義については、本研究で発見される新たな多くの問題を数学の各分野へ提起し、また新たな見地、技法の還元という形で貢献できると考えている。

#### 4. 研究成果

近年、局所エントロピー理論が Blanchard, Ye, Kerr, Li などの研究により大きく発展し、現在エントロピー理論の新局面を迎えている。この予想と関連する大きな問題として、正のエントロピーをもつ同相写像を許容する1次元連続体で「どのような連続体が indecomposable という複雑な連続体を含むか」という問題が残されていたが、研究代表者は2017年 Darji との共同研究で、正のエントロピーをもつ同相写像を許容する一般のグラフ・ライクな連続体は indecomposable 連続体を含むという定理の証明に成功した。さらに研究代表者は2018年、この成果を発展させてグラフ・ライク連続体上では Blanchard 等の結果と空間の indecomposability を融合した全く新しい幾何学的かつ力学的構造定理が得られることを示した。この定理の証明のために幾つかのアイデア (free tracing property by free chains) を導入したが、これらのアイデアは今後のこの方面に大きく貢献できる重要な道具になると考えている。また Set-values な写像の逆極限について、次元の評価不等式および幾何学的構造定理を得た。これらの結果も将来の set-values な写像の力学系理論構築の足掛かりになると期待している。更に幾何学的トポロジーにおいても、Continuum-wise injective maps や eventual coloring numbers についての興味ある結果を得た。本研究で得られた成果は、Fund. Math. Proc. AMS. Topology and its Appl. Advances in Math. Topology Proceedings, Scientiae Mathematicae Japonica に掲載、または掲載予定である。

#### 5. 主な発表論文

[雑誌論文](計 8 件)

- (1) H. Kato, Topological entropy and IE-tuples of indecomposable continua, Fund. Math. 査読有, 受理済み
- (2) H. Kato, Monotone maps of G-like continua with positive topological entropy yield indecomposability, Proc. AMS. 査読有 2019 April, Electronic version.
- (3) M. Hiraki and H. Kato, On inverse limits with set-valued functions on graphs, dimensionally stepwise spaces and ANRs, Topology Appl. 査読有 226 (2017),16-30. <https://doi.org/10.1016/j.topol.2017.04.022>
- (4) H. Kato, On dimension and shape of inverse limits with set-valued functions, Fund. Math. 査読有 236 (2017), 83-99. DOI: 10.4064/fm233-4-2016
- (5) U. Darji and H. Kato, Chaos and indecomposability, Advances in Mathematics, 査読有 304 (2017), 793-808. <https://doi.org/10.1016/j.aim.2016.09.012>
- (6) E. Matsuhashi and H. Kato, Continuum-wise injective maps, Topology Appl. 査読有 202 (2016), 410-417. <https://doi.org/10.1016/j.topol.2016.01.029>
- (7) Y. Ikegami, A. Ueda and H. Kato, On eventual coloring numbers, Topology Proceedings, 査読有 47 (2016), 1-14.
- (8) A. Ebisawa and H. Kato, Colorings for set-valued maps, Scientiae Mathematicae Japonicae, 査読有 29 (Online 2016-8, p.1-10).

[学会発表](計 17 件)

- (1) 加藤久男, トポロジカルエントロピーと連続体の非分解性, Workshop on geometry of foliations and its applications, 京都教育大学, 12月15日, 2018.
- (2) 加藤久男, Zero-dimensional cover of dynamical systems, International Conference on Topology and Applications, Cochin, India Dec. 11, 2018.
- (3) 加藤久男, Chaotic continua and chaotic dynamical systems II, International Workshop on Topology and Applications, Cochin, India Dec. 8, 2018.
- (4) 加藤久男, Chaotic continua and chaotic dynamical systems I, International Workshop on Topology and Applications, Cochin, India Dec. 7, 2018.
- (5) 加藤久男, Zero-dimensional covers of dynamical systems, Topology seminar, Shantou university, Shantou, China Nov. 26, 2018.
- (6) 加藤久男, Topological entropy and indecomposability of continua, Topology Conference in Shantou, Shantou, China Nov. 24, 2018.
- (7) 加藤久男, Topological entropy and chaotic topological structures of continua, Topology seminar, Wuyi university, 江門市, 中国 Nov. 21, 2018.
- (8) 加藤久男, Topological entropy and graph-like continua, 2018 International Conference on Topology and its Applications, Nafpaktos, Greece, July 7-11, 2018.
- (9) 加藤久男, Characterization of graph-like continua containing indecomposable subcontinua and topological entropy, RIMS 共同研究「Advances in general topology and their problems」, 京都府京都市 (2018). 6月20-22日.
- (10) 加藤久男, 位相エントロピーと分解不可能な空間: Topological entropy and indecomposable continua, RIMS 共同研究「力学系 -理論と応用の融合」, 京都府京都市 (2018) 6月5-8日.
- (11) 加藤久男, Topological entropy and topological structures of 1-dimensional continua,

日本数学会、山形大学 (2017) 9月14日.

(12) 加藤久男, Topological entropy and topological structures of G-like indecomposable continua, 7th Visegrad Conference on Dynamical Systems, Opava 2017, (2017) 26-30 June, Silesian University in Opava.

(13) 加藤久男, Topological entropy and topological structures of G-like continua, 京都大学数理解析研究所研究集会、京都府京都市 (2017) 6月20日.

(14) 加藤久男, Topological structures of generalized inverse limits, ジェネラルトポロジーシンポジウム, 筑波大学 (2016) 12月12日.

(15) 加藤久男, On dimension of generalized inverse limits, 京都大学数理解析研究所研究集会、京都府京都市 (2016) 10月23日.

(16) 加藤久男, On inverse limits with set-valued functions, 31st Summer Conference on Topology and its Applications, University of Leicester, Leicester, England, Aug. 4, 2016.

(17) 加藤久男, Dimension of inverse limits with set-valued functions, The 12th Prague Topological Symposium, Czech Technical University, Prague, Czech, July 25, 2016.

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況(計 0 件)

名称:

発明者:

権利者:

種類:

番号:

出願年:

国内外の別:

取得状況(計 0 件)

名称:

発明者:

権利者:

種類:

番号:

取得年:

国内外の別:

〔その他〕

ホームページ等

## 6. 研究組織

### (1) 研究分担者

研究分担者氏名:

ローマ字氏名:

所属研究機関名:

部局名:

職名:

研究者番号(8桁):

### (2) 研究協力者

研究協力者氏名:

ローマ字氏名:

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。