

令和 2 年 5 月 2 日現在

機関番号：14301

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2016～2019

課題番号：16K05146

研究課題名(和文)3,4次元多様体の種々の不変量とその応用

研究課題名(英文)Various invariants of 3 and 4-manifolds and their applicationsUe

研究代表者

上 正明 (Ue, Masaaki)

京都大学・理学研究科・教授

研究者番号：80134443

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,100,000円

研究成果の概要(和文)：ザイフェルト有理ホモロジー3球面と呼ばれる3次元多様体を主として対象に、組み合わせ的に定義された不変量とゲージ理論に由来する不変量の関係を研究した。これらは「ホモロジーコボルディズム不変」という性質を持つが、他の性質は相互に異なる。近年新たに登場した不変量との関連をさらに解明する必要がある。

4次元トポロジーに関する日本語の教科書の執筆がほぼ完成した。これは研究代表者自身の結果も含めて近年までの4次元トポロジーに関する知見を含んでいる。

研究成果の学術的意義や社会的意義

3次元多様体のホモロジーコボルディズム不変量は近年活発に研究されており、その研究をさらに発展させることは、4次元トポロジー、特に境界付き4次元多様体の性質の解明にとって有用である。また4次元トポロジーの教科書は基礎理論から類書にない近年の研究結果までを含んでおり、この分野の研究を総合的に知る上で有用なものになることが期待される。

研究成果の概要(英文)：We investigated the relation between invariants of 3-manifolds (in particular Seifert rational homology 3-spheres) which are defined combinatorially and those coming from gauge theories. These invariants are homology cobordism invariants, but other properties of them are mutually different. We need further research about the relations between newly developed invariants and known results.

We almost completed writing the textbook about 4-dimensional topology written in Japanese, which includes newly developed results about 4-manifolds as well as our own research results.

研究分野：3,4次元多様体のトポロジー

キーワード：4次元多様体 3次元多様体 Seiberg-Witten理論 Floerホモロジー ザイフェルト多様体

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

3,4次元多様体の研究において、特に「ホモロジーコボルディズム不変」という性質を満たす3次元多様体の不変量の研究は境界付き4次元多様体のトポロジーの解明にとっても重要である。特に Manolescu が発見した不変量は「5次元以上の位相多様体が単体分割をもつか」という問題に否定的解答を与えた画期的なものであったが、既知の不変量との関係は不明な点が多く、その解明は重要な課題であった。また境界付き4次元多様体の交叉形式に対し、Manolescu は境界の3次元多様体の別の不変量による制約を与えたが、これは以前から知られている Heegaard Floer ホモロジーに由来する不変量による同様な結果とは見かけが異なり、両者の関係は一般には不明なままであった。

2. 研究の目的

3次元多様体の不変量、特に Seiberg-Witten 理論や Heegaard Floer ホモロジー理論に由来するホモロジーコボルディズム不変な不変量の性質、それらの相互関係や既知の不変量との関連を明らかにすることで、それらが3次元多様体を境界とする4次元多様体のトポロジーにいかなる制約を与えるかを解明することが当初における研究の1つの目的である。さらにホモロジー3球面に対して近年種々の新しいホモロジーコボルディズム不変量が定義されているが、計算は必ずしも容易でなく、それらの性質は相互に異なっている。その関係を知ること、多様体に対する具体的な値を求める手段を開発することももう1つの目的である。

3. 研究の方法

3次元多様体のうちでもザイフェルト有理ホモロジー3球面と呼ばれるクラスについて、組み合わせ的に定義される μ 不変量のような古典的不変量と Seiberg-Witten 理論や Heegaard Floer ホモロジー理論由来の不変量との関係について、Seiberg-Witten Floer ホモトピー型や対合的 Heegaard Floer ホモロジーの理論からもたらされた不変量との関連を解明することで研究代表者や他の研究者が明らかにしていた結果をより拡張する。さらにそれらの結果が境界付き4次元多様体のトポロジーに与える制約を解明することを目指す。

4. 研究成果

(1)

研究代表者の上は、3, 4次元多様体のトポロジーを研究対象としている。特にザイフェルト有理ホモロジー3球面と呼ばれる3次元多様体のクラスについて、組み合わせ的に定義される μ 不変量 (Neumann-Siebenmann 不変量) と Seiberg-Witten 理論に由来する Fukumoto-Furuta の不変量や Heegaard Floer ホモロジー理論に由来する d 不変量 (補正項不変量) との関連について研究し、これらがある条件のもとで Atiyah-Patodi-Singer によるエータ不変量のような解析的不変量を解して関連することを見出し、これをより一般のグラフ多様体の場合に拡張することなどを目指して研究を継続した。一方 Manolescu は Seiberg-Witten Floer ホモトピー型の理論から β 不変量と呼ばれる新たな不変量を導入した。この不変量は一般のホモロジー3球面において古典的な2を法として定義される Rochlin 不変量の整数値への持ち上げでかつホモロジーコボルディズム不変という両方の性質をもつ初めての例であったが、登場時点では他の不変量との関連は必ずしも明らかでなかった。これに対して、Dai と Stoffregen はザイフェルト有理ホモロジー3球面を含むより広いクラスであるある種のグラフ多様体において、 β 不変量が μ 不変量と一致することを示し、これらのクラスにおいて μ 不変量がホモロジーコボルディズム不変であることを証明した。これは研究代表者や Stipsicz がある種のグラフ多様体について μ 不変量がホモロジーコボルディズム不変であることを示していたことの一般化となっている。また研究代表者はザイフェルト有理ホモロジー3球面を境界とする4次元スピンの多様体の符号数をその境界の μ 不変量で評価する不等式を見出すことで、これらの4次元多様体の交叉形式に関する制約を得ていた。一方で Heegaard Floer ホモロジー理論に由来する d 不変量 (補正項不変量) を用いて負定値な交叉形式をもつ境界付き4次元多様体の符号数に対する同様な評価式が Ozsvath-Szabo によって得られていたが、これらの不等式は一般に一致するものではなく、両者の関連を解明することを目指して研究を継続した。これに対して、Hendricks-Manolescu は対合的 Heegaard Floer ホモロジー理論を創始し、そこから d 不変量の変種である別のホモロジーコボルディズム不変量を定義した。彼らはそれらの不変量によって d 不変量を用いた不等式をより精密化する結果を得ている。また Dai と Stoffregen はある種のグラフ多様体に対して、対合的 Heegaard Floer ホモロジー由来の新たな不変量と μ 不変量との関係を見出し、それらの多様体のホモロジーコボルディズム類の独立性について新たな知見を得た。これは Seiberg-Witten 理論からもたらされた結果の Heegaard Floer 理論における対応物と見なせ

る．研究代表者はザイフェルト有理ホモロジー3 球面に対する μ 不変量や d 不変量の関係を論じるプレプリントを一旦まとめ、それをより広いグラフ多様体のクラスに拡張する方法について検討していたが、Dai や Stoffregen によりある種のグラフ多様体上で μ 不変量と Manolescu の β 不変量の一致を示したことや、対合的 Heegaard Floer ホモロジーに由来する補正項型不変量との関連を示したことから、これらの結果と研究代表者の手法との関連を新たに考える必要があると判断している．特に以下の点は未解明であり、今後の研究課題である．

- ・ μ 不変量がすべてのグラフ多様体に対しホモロジーコボルディズム不変であるという予想を解決すること．ある広いクラスのグラフ多様体に対しては β 不変量や新しい補正項型不変量を用いて肯定的に解決したが、一般には未解決である．
- ・ ホモロジー3 球面に対して定義された種々のホモロジーコボルディズム不変量、特に β 不変量や新しい補正項型不変量の関係を解明すること．前者は Seiberg-Witten Floer ホモロジーの精密化である Seiberg-Witten Floer ホモトピー型の理論からもたらされたが、Heegaard Floer 理論にはこれに対応するものが未だ知られておらず、対合的 Heegaard Floer ホモロジーとの関係もまだ明らかでない．そのため不変量どうしの関係も未解明である．

(2)

研究代表者は数年にわたり 4 次元トポロジーに関する日本語の教科書の執筆を進めてきた．これは研究代表者自身の結果も含めて 4 次元多様体に関する包括的な解説を意図したものである．執筆に時間がかかっていたが、細部の若干の補筆を除けば本文が完成し、学習院大学の松本幸夫氏による序章を加える形で 2 分冊として出版ができる見通しとなった．本文は 4 次元多様体の基礎理論から始めて、Freedman による 4 次元位相多様体の理論、Donaldson によるゲージ理論、Seiberg-Witten 理論、インスタントンおよび Seiberg-Witten Floer ホモロジー理論、Heegaard Floer ホモロジー理論、Manolescu により Seiberg-Witten Floer ホモトピー型の理論、古田による Seiberg-Witten 方程式の有限次元近似理論やそれらの 4 次元多様体への応用、複素曲面やシンプレクティック多様体、Lefschetz ファイバー空間の理論などを含む．執筆が遅延したことで比較的近年の成果を取り込んだため、類書にない特徴を持ったものになったと考えている．

(3)

研究分担者の加藤毅は非可換幾何学や非線型モジュライ空間の幾何解析の研究をすすめ、後者に関連して Seiberg-Witten 理論についても研究している．特に中村信裕、今野北斗との共同研究で 4 次元スピン多様体の族の Seiberg-Witten 理論を展開し、ある種の 4 次元多様体の同相群と微分同相群が弱ホモトピー同値でないことを示した．従来から 4 次元多様体の同相類と微分同相類に著しい相違があることは広く知られているが、この結果は同相群の観点でも相違があることを示した点で新しい視点をひらくものといえる．また加藤毅はゲージ理論セミナーを主催してゲージ理論の新しい研究成果を紹介することに寄与した、研究代表者もセミナーに参加し多くの知見を得て、その結果は上記の 4 次元トポロジーの教科書の内容に反映させている．

(4)

研究分担者の藤井道彦は幾何学的観点から群の増大度の研究を進めており、Artin 群や 2 つの無限巡回群の融合積の spherical growth に関して新しい公式を導いた．

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計6件（うち査読付論文 6件/うち国際共著 2件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 T. Kato	4. 巻 -
2. 論文標題 Induced map on K theory for certain Gamma-equivariant maps between Hilbert spaces	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of non commutative geometry	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 D. Croydon, T.Kato, M. Sasada, S. Tsujimoto	4. 巻 -
2. 論文標題 DYNAMICS OF THE BOX-BALL SYSTEM WITH RANDOM INITIAL CONDITIONS VIA PITMAN'S TRANSFORMATION	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Mimori of AMS	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 T. Kato, S. Tsujimoto, A. Zuk	4. 巻 350,1
2. 論文標題 Spectral coincidence of transition operators, Automata groups and BBS in tropical geometry	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Comm. Math. Phys.	6. 最初と最後の頁 205-229
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 M. Fujii, T. Satoh	4. 巻 B66
2. 論文標題 The geodesic growth series for pure Artin groups of dihedral type	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 RIMS Kokyuroku Bessatsu	6. 最初と最後の頁 133-146
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 M. Fujii	4. 巻 41
2. 論文標題 A new formula for the spherical growth series of an amalgamated free product of two infinite cyclic groups	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Kodai Math. J.	6. 最初と最後の頁 475--511
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 T. Kato	4. 巻 -
2. 論文標題 Induced map on K theory for certain Gamma-equivariant maps between Hilbert spaces	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of non commutative geometry	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計12件 (うち招待講演 12件 / うち国際学会 6件)

1. 発表者名 T. Kato
2. 発表標題 Some development of Seiberg-Witten theory and related topics
3. 学会等名 Soton-Kyoto-Workshop (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 T. Kato
2. 発表標題 Seiberg-Witten理論周辺の応用と発展
3. 学会等名 幾何学シンポジウム (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 T. Kato
2. 発表標題 A rigidity theorem of the Z_2 valued Seiberg-Witten invariants for spin families
3. 学会等名 Index Theory, Duality and Related Fields (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 T. Kato
2. 発表標題 Twisted Donaldson invariant
3. 学会等名 K-theory and Noncommutative Geometry (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 T. Kato
2. 発表標題 Twisted Donaldson invariant
3. 学会等名 Conference "Gauge theory and applications" (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 T. kato
2. 発表標題 Higher Nahm transform in non commutative geometry
3. 学会等名 2018 Spring operator algebra program at ECNU (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 M. Fujii
2. 発表標題 The geodesic growth series for certain Seifert fiber spaces
3. 学会等名 Workshop "Journées de Geometrie Hyperbolique (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 M. Fujii
2. 発表標題 トールス結び目群の増大度
3. 学会等名 複素解析セミナー (招待講演)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 T. Kato
2. 発表標題 Some development of Seiberg-Witten theory and related topics
3. 学会等名 Soton-Kyoto workshop2019 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 T. Kato
2. 発表標題 Seiberg-Witten理論周辺の応用と発展
3. 学会等名 幾何学シンポジウム (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 T. Kato
2. 発表標題 A rigidity theorem of the Z_2 valued Seiberg-Witten invariants for spin families
3. 学会等名 Index Theory, Duality and Related Fields (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 T. Kato
2. 発表標題 Twisted Donaldson invariant
3. 学会等名 K-theory and Noncommutative Geometry (招待講演)
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計1件

1. 著者名 T.Kato	4. 発行年 2016年
2. 出版社 World Scientific	5. 総ページ数 272
3. 書名 Dynamical scale transform in tropical geometry	

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究分担者	加藤 毅 (Kato Tsuyoshi) (20273427)	京都大学・理学研究科・教授 (14301)	

6. 研究組織（つづき）

	氏名 (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究 分 担 者	藤井 道彦 (Fujii Michihiko) (60254231)	琉球大学・理学部・教授 (18001)	