

令和 5 年 6 月 8 日現在

機関番号：32660

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2016～2022

課題番号：16K05156

研究課題名（和文）低次元多様体内の閉曲面の対称性と写像類群の研究

研究課題名（英文）Research on symmetries and mapping class groups on the surfaces in low-dimensional manifolds

研究代表者

廣瀬 進 (Hirose, Susumu)

東京理科大学・理工学部数学科・教授

研究者番号：10264144

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,400,000円

研究成果の概要（和文）：3, 4次元多様体内に埋め込まれた曲面の対称性及び写像類群についての位相幾何学的な観点からの研究を主として行った。特に、種数3及び4の有向閉曲面上の有限群作用のデーンツイスト表示、3次元球面内の結び目のブリッジ曲面のゲーリッツ群の位数が有限になる条件や無限になる条件さらには擬アノソフ元の拡大度、3次元多様体の分岐的 virtual fibration のモノドロミーの拡大度についての結果を得た。

研究成果の学術的意義や社会的意義

局所的に  $n$  次元のユークリッド空間と同一視できる空間のことを  $n$  次元多様体と呼ぶ。この空間を理解することは我々の住んでいる空間を理解するうえで欠かせないものであり、20世紀の後半には、次元  $n$  が大きい場合について明解な理論が作られた。近年、特に  $n=3,4$  の場合の研究が急速に進展しており、本研究は、特に2次元多様体の上の写像に関する研究を通して3, 4次元多様体の研究を推し進めるものである。

研究成果の概要（英文）：We made several researches mainly on symmetries and mapping class groups on the surfaces embedded in 3 or 4-dimensional manifolds from the topological viewpoint. Especially, we obtained results on Dehn-twist presentations for the finite group actions on orientable closed surface of genus 3 or 4, Goeritz groups of bridge surfaces of knots in a 3-sphere, and branched virtual fibrations of 3-manifolds.

研究分野：位相幾何学

キーワード：低次元トポロジー 写像類群 リーマン面 擬アノソフ同相写像 結び目

## 様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

低次元多様体の研究において、多様体内の曲面についての考察が欠かせない。4次元多様体については、交差形式 (= 曲面同士の交わりの個数) に関する研究、基本的な4次元多様体内の曲面に沿った分岐被覆としての4次元多様体の構成、埋め込まれたtorusに沿ったsurgeryによるexotic構造の構成、さらには、シンプレクティック構造を持つ4次元多様体がレフシェッツ・ファイバー構造と呼ばれる埋め込まれた曲面をファイバーとするファイバー構造を持つことなど、枚挙にいとまがない。3次元多様体については、すべての3次元多様体は3次元ハンドル体とその境界となっている曲面で張り合わせるにより構成されることが知られている。この張り合わせる曲面のことをヒーガード曲面と呼び、この曲面の位置を研究することは3次元多様体の位相幾何学的な研究の重要なテーマの一つである。また、3次元多様体の内の多くが円周上の曲面束を有限被覆とすることも示されている。以上から、埋め込まれた曲面の研究は低次元多様体論の中心課題のひとつといえる。

低次元多様体  $M$  に埋め込まれた曲面  $S$  について、 $S$  上の可微分同相写像で  $M$  全体に拡張するもののなす  $S$  の写像類群の部分群を、埋め込み  $(M, S)$  の写像類群とよぶ。本研究に先行して、研究代表者は、4次元球面もしくは複素射影平面への閉曲面の標準的というべき埋め込みについて、その写像類群が、スピン構造やそれに類似した構造を保つ写像からなる閉曲面の写像類群の部分群と一致することを示している。また、3次元多様体のヒーガード曲面の写像類群については、3次元球面やレンズ空間の種数2のヒーガード曲面について、Erol Akbas 氏、Sangbum Cho 氏、古宇田悠哉氏、Martin Scharlemann 氏などによる有限生成系や表示などに関する結果がある。

### 2. 研究の目的

3, 4次元多様体内の曲面の写像類群に関連して以下の研究を行う。

(1) 写像類群の研究と、リーマン面のモジュライ空間の研究は不可分の関係にある。モジュライ空間の大域的研究の上では、モジュライ空間の特異点に関する理解が必要であり、これはリーマン面上の有限群作用と関連している。有限群作用は軌道空間を用いる形で記述されているが、そのままで実際の作用を理解することは難しい。一方、写像類群はデーンツイストと呼ばれる写像で生成されていることが知られており、この写像のホモロジー群や基本群への作用を理解することは容易である。本研究では、有限群作用をデーンツイストにより記述することを目標とした。

(2) 写像類群の元はニールセンとサーストンにより周期的同相写像、可約な同相写像、擬アノソフ同相写像に分類される。(1)のテーマは、周期的同相写像にかかわるテーマであるが、さらに擬アノソフ同相写像についても研究を行う。擬アノソフ同相写像の共役類を特徴づける量として拡大度があり、それはリーマン面のモジュライ空間における測地線の長さとも深い関係のある値である。写像類への位相幾何学的な制限のもと、拡大度の最小値について研究する。位相幾何学的な制限としては、ある種の曲面束のモノドロミーとなることや3次元ハンドル体へ拡張できることなどを議論する。

### 3. 研究の方法

(1) 閉曲面上の有限群作用のデーンツイスト表示については、まず、群作用の軌道空間の胞体分割を基に、閉曲面の胞体分割とそこへの有限群作用を求める。その胞体分割を基に閉曲面上の閉曲線への有限群作用を考察し、デーンツイスト表示を求める。求めた結果の妥当性について、阿原一志氏 (明治大学)、逆井卓也氏 (東京大学) と鈴木正明氏 (明治大学) により開発された Mathematica 上で動作する Teruaki 等のソフトウェアを用いて検証する。

(2) 擬アノソフ同相写像をモノドロミーとする円周上の曲面束については、1次の実係数コホモロジーの次元が2以上の場合には、曲面束としての構造が無限に入り、したがってモノドロミーも無限通り取ることができていることが知られている。所与の位相幾何学的な制限の下でのモノドロミー同士の関係性を明らかにすることにより、小さい拡大度を持つ擬アノソフ同相写像の系列を構成する。また、組みひもが擬アノソフであることの検証や、その拡大度や不変な測地線層を求めるために、Bestvina-Handel によるアルゴリズムを実装した Toby Hall によるプログラム train を用いた。

(3) 研究集会に参加することで最新の研究成果や研究方法について情報収集を行った。さらに、年に何度か出張すること、コロナ禍においては ZOOM などを用いることで、共同研究者と研究打ち合わせを行った。

### 4. 研究成果

写像類群と結び目に関して次の研究成果を得た。

(1) 有向閉曲面上の有限群作用のデーンツイストによる表示の研究：

以前に種数 3 と 4 の有向閉曲面について有限巡回群の作用のデーンツイストによる表示を求めた際の手法と Broughton による種数 3 の有向閉曲面上の有限群作用の分類表や, Bogopolski による種数 4 の分類表を基に, 種数 3 と種数 4 の有向閉曲面上の有限群作用についてデーンツイストによる表示を得た. さらに, 種数 7 の有向閉曲面上の最大位数有限群作用つまりフリッケ-マクベス曲線の自己同型群についてもデーンツイストによる表示を得た. また, 有限群作用の特別なクラスとして, 超楕円の写像類群の有限部分群があるが, すべての種数についてそのデーンツイスト表示が, 長谷川雄介氏 (東京理科大学 (当時)) 田神慶士氏 (広島修道大学) との共同研究により求められた. さらに, 種数 5 の有向閉曲面上の有限巡回群の作用について, 石川傑也氏 (東京理科大学 (当時)) 大森源城氏 (東京理科大学) との共同研究により, デーンツイスト表示を得た.

(2) 3次元球面内の絡み目のブリッジ曲面のゲーリッツ群に関する研究：

向け付け可能でコンパクトな 3次元多様体のヒーガード曲面上の向きを保つ同相写像で, 3次元多様体全体に拡張できるもののイソトピー類のなす群をヒーガード曲面のゲーリッツ群とよぶ. 一方, 3次元球面内の絡み目は, 2つの自明なタングル, すなわち 3次元球体内の自明なひもに分割できることが知られており, その 3次元球体の境界は 3次元球面内の 2次元球面となっているが, それをブリッジ球面と呼ぶ. ブリッジ球面上の向きを保つ写像で, 絡み目を保つ 3次元球面上の同相写像に拡張するもののイソトピー類のなす群をブリッジ球面のゲーリッツ群と呼ぶ. 金英子氏 (大阪大学) 古宇田悠哉氏 (広島大学) 井口大幹氏 (広島大学) との共同研究により, この 2つのゲーリッツ群の関係を明らかとするとともに, それらの群の構造について研究を行ない, 次の成果を得た. ヒーガード分解の Hempel 距離と同様にして, ブリッジ曲面に対する距離を定めることができるが, その距離が十分大きな時に, ブリッジ球面のゲーリッツ群が有限群となることを示した. ブリッジ分解の距離が 1 以下である時に, ブリッジ球面のゲーリッツ群が無限群となること, 特に, あるブリッジ分解の安定化として現れるブリッジ分解に対して, ブリッジ球面のゲーリッツ群の中に擬アノソフ元が現れることを示した. 自明な結び目やホップ絡み目のブリッジ分解とその安定化の系列について, それらのゲーリッツ群の系列の中に, エントロピーの小さい擬アノソフ元の系列を作ることができ, その結果, 3次元球面や 3次元実射影空間のヒーガード分解の安定化の系列にたいしても同様の事実を示すことができた.

(3) 3次元多様体の分岐的 virtual fibration の研究：

作間誠氏 (大阪公立大学) により, 任意の 3次元多様体に対して, その 2重分岐被覆として円周状の曲面束が構成されることが示されている. そのモノドロミーとして現れる写像類の力学的な振る舞いについての共同研究を金英子氏 (大阪大学) と行い, 3次元球面, 円周と 2次元球面の直積の連結和, ある種のレンズ空間や双曲 3次元多様体の無限列について, その 2重分岐被覆として現れる曲面束のモノドロミーとして拡大度の小さな擬アノソフ同相写像の系列が得られることを明らかにした. さらに, 金英子氏 (大阪大学), Efstratia Kalfagianni 氏 (ミシガン州立大学) との共同研究により, 任意の向き付け可能な 3次元多様体に対して, その 2重分岐被覆としていくらかでも大きな双曲体積を持つ円周上の曲面束が構成できることを示した.

(4) 古典的結び目と曲面結び目に関する研究：

結び目の FPB 表示と Arf 不変量についての研究：古典的結び目に対して小林・平澤・降旗の 3氏によって導入された FPB 表示から Arf 不変量を得る簡明な公式を得た.

点付き球面上の弧を用いた 4次元球面内の閉曲面の表示についての研究 (城川樹生氏 (東京理科大学 (当時)) 大森源城氏 (東京理科大学) との共同研究): 4次元球面内の閉曲面すなわち曲面結び目の表示としては, その超平面による切り口を用いたモーション・ピクチャー・メソッドが古来より利用されてきた. ここで現れるバンドを 2次元球面上のねじりのないバンドに改変することにより, それらのバンドのコアとなっている点付き 2次元球面内の弧による閉曲面の表示を得るとともに, 閉曲面の結び目型を変えない表示の変形について考察した.

結び目の自明な結び目への村杉和分解についての研究 (柳井駿一氏 (東京理科大学 (当時)) 大森源城氏 (東京理科大学) との共同研究): 任意の結び目が自明な 2つの結び目へ村杉和分解できることが平澤氏と Able 氏により示されている. この村杉和分解を与える多角形の角の数の最小値が元の結び目の複雑度をあらわす一つの指標となるが, この値が連結和に対して劣加法性を持つことを示し, さらに交点数が 7 以下の結び目やある種の 2橋結び目についてこの値を求めた.

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計9件（うち査読付論文 7件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Susumu Hirose, Efstratia Kalfagianni, Eiko Kin	4. 巻 -
2. 論文標題 Volumes of fibered 2-fold branched covers of 3-manifolds	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Journal of Topology and Analysis	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Susumu Hirose, Eiko Kin,	4. 巻 148
2. 論文標題 On hyperbolic surface bundles over the circle as branched double covers of the 3-sphere,	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Proceedings of A.M.S.	6. 最初と最後の頁 1805-1814
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1090/proc/14825	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Susumu Hirose, Eiko Kin,	4. 巻 26
2. 論文標題 A construction of pseudo-Anosov braids with small normalized entropies,	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 New York Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 562-597
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Susumu Hirose, Daiki Iguchi, Eiko Kin, Yuya Koda	4. 巻 -
2. 論文標題 Goeritz groups of bridge decompositions,	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 International Mathematics Research Notices,	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1093/imrn/rnab001	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 廣瀬 進	4. 巻 2060
2. 論文標題 Dehn twist presentations of finite group actions on oriented surfaces of genus 3	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 京都大学数理解析研究所講究録	6. 最初と最後の頁 118-130
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 廣瀬 進	4. 巻 1
2. 論文標題 Dehn twist presentations of finite group actions on oriented closed surface of genus 4	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 第16回代数曲線論シンポジウム 報告集	6. 最初と最後の頁 125-133
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Hirose Susumu	4. 巻 41
2. 論文標題 Generators for the mapping class group of a nonorientable surface	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Kodai Math. J.	6. 最初と最後の頁 154 ~ 159
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2996/kmj/1521424829	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Hirose Susumu, Kin Eiko	4. 巻 68
2. 論文標題 The asymptotic behavior of the minimal pseudo-ANOSOV dilatations in the hyperelliptic handlebody groups*	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 The Quarterly Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 1035 ~ 1069
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1093/qmath/hax012	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Susumu Hirose, Yasushi Kasahara	4. 巻 68
2. 論文標題 A uniqueness of periodic maps on surfaces	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Journal of the Mathematical Society of Japan	6. 最初と最後の頁 1777--1787
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2969/jmsj/06841777	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている(また、その予定である)	国際共著 -

[学会発表] 計13件(うち招待講演 10件/うち国際学会 0件)

1. 発表者名 廣瀬 進
2. 発表標題 3次元多様体の2重分岐被覆となる曲面束の擬アノソフモノドロミーのエントロピーについて
3. 学会等名 研究集会「結び目の数理論」
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 廣瀬 進
2. 発表標題 Goeritz groups of bridge spheres and wicket groups
3. 学会等名 研究集会「拡大K00K セミナー2019」
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 廣瀬 進
2. 発表標題 Goeritz groups of bridge decompositions
3. 学会等名 2019年度「リーマン面・不連続群論」研究集会(招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 廣瀬 進
2. 発表標題 Dehn twist presentations of finite group actions on oriented closed surface of genus 4
3. 学会等名 第 16 回代数曲線論シンポジウム (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 廣瀬 進
2. 発表標題 Dehn twist presentations of finite group actions on oriented surfaces of genus 3
3. 学会等名 研究集会「変換群を核とする代数的位相幾何学」(招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 廣瀬 進
2. 発表標題 結び目の FPB 表示と Arf 不変量について
3. 学会等名 Knotting Nagoya (結び目の数理セミナー) (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 廣瀬 進
2. 発表標題 Dehn twist presentations of finite group actions on oriented surfaces of genus 3
3. 学会等名 研究集会「リーマン面に関連する位相幾何学」(招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 廣瀬 進
2. 発表標題 An invitation for the mapping class groups of handlebodies
3. 学会等名 ハンドル体結び目とその周辺10・Hurwitz action 7 (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 金 英子, 廣瀬 進
2. 発表標題 Symmetric braids arising from monodromies of branched virtual fibrations of closed 3-manifolds
3. 学会等名 広島大学 トポロジー・幾何セミナー (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 廣瀬 進
2. 発表標題 結び目の FPB 表示と Arf 不変量について
3. 学会等名 研究集会「2017年度琉球結び目セミナー」
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 廣瀬 進
2. 発表標題 超楕円のハンドル体群の有限表示について
3. 学会等名 早稲田双曲幾何幾何学的群論セミナー (招待講演)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 廣瀬 進
2. 発表標題 超楕円のハンドル体群の有限表示
3. 学会等名 研究集会「リーマン面に関連する位相幾何学」(招待講演)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 廣瀬 進
2. 発表標題 クライン4次曲線の自己同型群の Dehn twist 表示について
3. 学会等名 第14回代数曲線論シンポジウム(招待講演)
4. 発表年 2016年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関