様　式　C－19、F－19－1、Z－19　(共通)

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　元 年　 5 月 13 日現在

機関番号：１０１０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2016～2018
課題番号：１６Ｋ０５１６５

研究課題名（和文）超幾何関数とパンルヴェ方程式

研究課題名（英文）Hypergeometric functions and Painleve equations

研究代表者
岩崎　克則（Iwasaki, Katsunori）

北海道大学・理学研究院・教授

研究者番号：００１７６５３８

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,500,000円

研究成果の概要（和文）：一般超幾何関数3F2(1)について、その隣接関係式の一般論を構築した。隣接関数の線形独立性、隣接関係式の存在と一意性、同時性、係数の計算アルゴリズム、群対称性を確立した。その応用として、無限個の3F2(1)連分数を構成し、打切り誤差の漸近展開の主要部を決定した。そのために、大きなパラメータを含む超幾何級数の漸近挙動を得る手法として離散鞍点法を開発した。また、パンルヴェ方程式については、これまでの研究を総括し、今後の研究の方向性を構想した。さらに超幾何関数がガンマ乗積表示をもつための必要条件も得た。

研究成果の学術的意義や社会的意義
超幾何関数やパンルヴェ方程式で定義される関数は、数学や数理物理学のさまざまな局面に現れる重要な特殊関数である。そこで、これらの関数に特徴的な性質を調べることや、関連する関数の計算手段を確立することは、数学や数理物理学にとって大変重要である。また、これらの目的を達成するために、漸化式・差分方程式や漸近解析などの分野に、隣接関係式の同時性や離散鞍点法などの概念や手法を導入することは、解析学に新し知見をもたらすことになり、有益である。

研究成果の概要（英文）：For generalized hypergeometric functions 3F2(1) we developed a general theory of contiguous relations. We established the linear independence of contiguous functions, existence and uniquness of contiguous relations, and algorithms for calculating their coefficients, as well as their group symmetry. As an application we constructed an infinite number of 3F2(1) continued fractions and determined exactly the leading asymptotics of their truncation errors. To do so we developed a discrete analogue of saddle point method for obtaining the asymptotic behavior of hypergeometric series containing a large parameter. As for Painleve equations we summarized the results obtained so far and set up the direction in which the next study should take. We also obtained some conditions for hypergeometric functions to admit gamma product formulas.

研究分野：微分方程式論

キーワード：超幾何関数　隣接関係式　超幾何連分数　漸近解析　離散鞍点法　誤差評価　ガンマ乗積表示　パンルヴェ方程式

１．研究開始当初の背景

一般超幾何関数 pFq は q+2 項隣接関係式をもつ(p<q+2 のとき)。これらは、ある条件下では、項数のより少ない隣接関係式に退化する。3F2 の場合、一般の隣接関係式は 4 項関係式であるが、独立変数の値が 1 のとき 3 項関係式に退化する。Bailey は微分方程式を用いてそれらを生成する方法を与えた。さらに Wilson はより直截で簡明な方法を与えた。さて、狭義の隣接関数とは、元の pFq の 1 つのパラメータの値を±1 ずらして得られる関数である。また、狭義の 3 項隣接関係式とは、元の pFq と他の 2 つの狭義隣接関数の間に成立つ線形関係である。3F2(1)の場合、パラメータの置換に関する対称性を除いて、全部で 12 個の狭義の 3 項隣接関係式が存在する。これらは Wilson によって構成された。それらを「基本」3 項関係式と呼ぶ。一方、我々は広い意味での隣接関数について考えることもできる。そこでは、すべてのパラメータの値が任意の整数だけずれることが許される。広い意味での 3 つの隣接関数の間に成立つ線形関係を「一般」3 項関係式という。3F2(1)に対する基本 3 項関係式の研究は Bailey と Wilson の仕事で完成したといえるが、一般 3 項関係式についてはそうではない。一般 3 項関係式は基本 3 項関係式の反復合成によって得られると言われことがある。しかし、この合成プロセスには非自明で興味深い問題点が多々存在し、一般 3 項関係式の理論は確立されているとは言いがたい。このことが、本研究課題における 3F2(1)に対する隣接関係式の研究へとつながっている。

Gauss は 2 つの 2F1 超幾何関数の比を表す一般的な連分数を導入した。これは、今日では Gauss 連分数と呼ばれており、数多くの重要な初等関数やより超越的な関数の連分数展開を与える点で興味深い。Van Vleck は Gauss 連分数の収束性について一般的な結果を確立した。Gauss 連分数は 2F1 超幾何関数のある隣接関係式から導かれる。2F1 の他の隣接関係式を用いることにより、Frank は同様の連分数を 8 つ構成し、それらの収束性について論じた。Borwein 達は、Gauss 連分数のある特別の場合に対して、打切り誤差の評価を与えた。Gauss 連分数や数値解析的手法に基づいて Colman 達は、ある特別な場合の 2F1 関数の高精度で効率的な計算アルゴリズムを開発した。一方、前段落で述べた通り、一般超幾何関数 3F2(1)もまた 3 項隣接関係式をもつ。従って、3F2(1)の隣接関係式に付随する連分数について論じたり利用したりすることは興味深い。たとえば Zhang は 3F2(1)の隣接関係式を用いて Ramanujan のエレガントな連分数に対する新しい証明を与えた。しかし、3F2(1)に対する超幾何連分数の一般論はこれまで論じられたことがない。そこで、本研究課題でそのような一般論の構築を志向することになった。

研究代表者は、先の科研費研究（課題番号 25400102）で、超幾何関数 2F1 のガンマ乗積公式の研究を開始した。これは、公式をできるだけたくさん発見して増やすという従来のこの分野の方向性ではなく、ガンマ乗積公式がなぜ存在するのかという根源的な理由を探り、そのような公式が存在するためのできるだけ精密な必要条件を確立し、公式の在処を絞り込む方向性の研究であった。先の科研費研究で既にいくつかの成果を得たが、今後に解決すべき問題や展開すべき課題がたくさん存在する。本研究課題で、この研究の継続深化を図ることとなった。

パンルヴェ方程式については、研究代表者は過去の長い期間にわたって研究を行ってきた(課題番号 16340049, 課題番号 20340036, 課題番号 25400102 等)。そこでは、解のモデュライ空間の構成や Riemann-Hilbert 対応の確立、パンルヴェ第 VI 方程式のカオス性などを代数幾何学や力学系理論を用いて論じてきた。最近は超幾何関数の研究へ軸足を移しているが、引き続きこの方面への関心も保持している。これまでの研究を総括し、次の発展を探る時機にある。

２．研究の目的

先ず、超幾何関数 3F2(1)に対する一般 3 項隣接関係式の一般論を確立する。隣接関係式の存在と一意性の証明、同時性の概念の導入、計算アルゴリズムの開発などが主な課題となる。これらを実行するためには、相異なるシフトベクトルに対する隣接関数が有理関数体上で線形独立であることを証明するのも重要なステップとなる。また、隣接関係式全体がもつ群対称性を見出すことや、隣接関係式の応用を与えることも興味深い課題となる。

上記の 3F2(1)隣接関係式の一般論の応用として、3F2(1)連分数の一般論を構築することが次の目的となる。この目的は二つの課題から成る。隣接関係式から出発して、漸化式・差分方程式を経由し、そして連分数へと至るプロセスを通じて、無限個のシフトベクトルから無限個の 3F2(1)連分数を構成することが一つの課題である。次に、構成された連分数の打切り誤差の漸近挙動を決定することが二つ目の課題となる。連分数の打切り誤差は、連分数に付随する差分方程式の劣勢解と優勢解の比によって制御される。そこで、超幾何関数の隣接関係式に由来する差分方程式の劣勢解と優勢解の漸近挙動を研究する必要性が生じる。これらの解は大きなパラメータ含む超幾何級数によって表されるから、結局、大きなパラメータを含む超幾何級数の漸近挙動を研究することが必要となる。劣勢解の漸近挙動については、そのオイラー積分表示に対して古典的なラプラス法（鞍点法）が適用できると考えられるので、それを実行する。

優勢解については、従来のラプラス法ではうまく行かないと考えられるので、新しい方法が必要である。このために、大きなパラメータをもつ超幾何和に対する離散ラプラス法（離散鞍点法）を開発することが更なる目的となる。これは、級数を離散的な積分と見立ててラプラス法の離散的な類似を追求することが基本的なアイデアとなるが、積分表示を経ずに級数を直接扱える点で、簡便さと適応範囲の広さをもつ優れた方法になると期待される。

さて、2F1 超幾何関数のガンマ乗積表示の研究では、従来からの研究を取りまとめる一方で、有効な領域を広げることが目的となる。また、広げた結果として登場する新たな現象の発掘も

重要な課題である。従来主に考察していたのは、中央領域と呼ぶパラメータ領域であったが、本研究課題では中央領域の境界である境界領域に考察の対象を広げる。その際に出てくる新しい現象や新しい必要条件を見出すことは興味深い。特に独立変数が有理数となるようなガンマ乗積公式をすべて決定する問題を考えることは一つの目標である。

本研究課題では、超幾何関数に関する研究を主に行うが、パンルヴェ方程式についても、これまでの幾何学的・力学系的な研究や周期解の研究を総括整理し、次のステップへ向かうための方向性を探る研究を行う。

３．研究の方法

隣接関係式の研究や超幾何連分数の研究では、研究協力者の蛭子彰仁と共同研究を行った。蛭子とは､彼が学振 PD として研究代表者の下でポスドクであったときから共同研究を開始した。彼が他大学へ職を得た後も、研究代表者の所属大学への招聘や彼の所属大学への訪問を重ねて密接に討論を行った。特に隣接関係式の同時性の議論や、超幾何連分数の誤差に関する計算機実験は、理論を組み立てる上でとても有効な指針となった。

また、例年、神戸大学で開かれる超幾何方程式研究会、熊本大学で開かれるアクセサリーパラメータ研究会、東京大学玉原国際セミナーハウスで開かれる特殊多様体研究集会、研究代表者の本務校で定期的に開かれる北海道特殊関数セミナーに出席して、超幾何関数やパンルヴェ方程式、更には複素領域における微分方程式論や、本研究課題に必要な研究情報の収集にあたった。また、それらの研究集会に参加して、自身の研究成果の途中報告を行い、関連する話題についての有益な討論を行った。

一方で、研究代表者自身も世話人の一人として、2017 年 11 月 3 日 4 日の両日、熊本大学において研究集会「複素微分方程式の楽しみ」を開催した。同様に、研究代表者を世話人の一人として、2018 年 8 月 27 日～29 日の 3 日間、北海道大学において研究集会「複素領域における微分方程式とその周辺」を開催し、2019 年 3 月 8 日 9 日の両日、東京海洋大学において「微分方程式と逆問題をめぐって」を開催した。これらは、超幾何関数、パンルヴェ方程式、複素領域の微分方程式、漸近解析、逆問題などの情報交換や成果発表の場として有効であった。

４．研究成果

3F2(1)超幾何関数の隣接関係式の研究については、まず適切にスケール変換変換された関数である 3f2(1)を導入した。これをパラメータ **a**=(a0,a1,a2;a3,a4)の関数と見なすとき 3f2(**a**)と表す。相異なる整数ベクトル **p** と **q** に対して、3f2(**a**+**p**)と 3f2(**a**+**q**)が複素数係数の有理関数体ℂ(**a**)上線形独立であることを示した。次に 3f2(**a**)=u(**a**)3f2(**a**+**p**)+v(**a**)3f2(**a**+**q**)の形の 3 項隣接関係式が一意的に存在することを示した。ここで, 係数 u(**a**)と v(**a**)は **a** の有理関数である。また、この隣接関係式は、適切にスケール変換された 6 つのフロベニウス解 3h2(1)によって同時に満たされることを示した。これを隣接関係式の同時性 simultaneousness と呼ぶ。隣接関係式の係数については､与えられたシフトベクトル **p** と **q** から有限回の代数的操作で u(**a**)と v(**a**)を計算するアルゴリズムを与えた。さらに一意性と同時性を使って、3f2(1)の隣接関係式の全体には位数 72 の有限群が作用することを発見した。これらの成果は、蛭子彰仁との共著として J. Math. Anal. Appl. 誌に発表された。なお同時性は、隣接関係式に付随する差分方程式を考える際に、その劣勢解と優勢解の取扱いにおいて重要な役割を果たすなど、汎用性の高い概念である。このあとの超幾何連分数の研究でも効果的に応用された。

3F2(1)超幾何連分数の研究については、まず隣接関係式から出発して差分方程式、そして連分数へと至る道筋を、スケール変換された関数 3f2(1)の言葉で表現した。その過程で、隣接関係式の根幹的な部分をなすある多項式を導入し、その計算アルゴリズムを与えた。この多項式は、後に連分数の打切り誤差を表現する上で重要な量となる。また、隣接関係式に働く対称性を 2 種類に分け、それぞれの場合に構成される連分数を straight type と twisted type と呼んだ。次に連分数の打切り誤差を評価するための一般論を構築した。これは古典的な Pincherle の定理を量化したものであり、打切り誤差の主要部を、連分数に付随する差分方程式の劣勢解と優勢解の比と Casorati 行列式の初項によって表現するものである。次に、この誤差評価の一般的枠組みがうまく働く無限個のシフトベクトルのクラスを導入した。このクラスのシフトベクトルに付随する無限個の連分数について、その打切り誤差の漸近展開の主要部を決定することが最終的な目標となる。そのために、まず付随する差分方程式の劣勢解の漸近挙動を、古典的なラプラス法を用いて求めた。劣勢解については、その Euler 積分表示が大きなパラメータ n を無限大にする過程で常に収束し、そのような連続ラプラス法が有効となるのであった。

一方、優勢解については n を無限大にする過程で Euler 積分表示が発散してしまい、連続鞍点法はうまく行かない。そんな状況でも、優勢解を表す級数の外見を見ただけで漸近挙動が分る方法はないだろうか？ 積分がなくても級数＝和がある。和も積分の一種！ 和を Riemann 和のようなものだと思う。n が無限大に行くとき、うまくスケール変換すると、Riemann 和のメッシュが細かくなっていき、通常の積分に近づいていく。それと同時に、積分内のパラメータ n が無限大になっていき、連続ラプラス法の状況に近づいていくと考えられる。そんな状況を思い浮かべると、級数をナマで処理する「離散ラプラス法（離散鞍点法）」が考えられるのではないかと期待できる。この発想をある一般的なクラスの超幾何型の和に対して実現し、大きなパラメータ n を含む超幾何和の漸近挙動を得るための方法を開発した。この方法を､上記の 3f2(1)

連分数に付随する差分方程式の優勢解に適用し、その漸近挙動を計算することができた。
以上の準備のもとに、劣勢解と優勢解の Casoratian の計算を実行し、劣勢解と優勢解の漸近挙動の結果を併せて誤差評価の一般式に代入することにより、誤差項の漸近挙動の主要部を exact に計算した。これは straight type および twisted type の双方について、無限個の 3F2(1)連分数の打切り誤差の主要部の計算に成功したものであり、今までにまったくなかった結果である。振り返ってみれば、より基本的な 2F1 連分数に対しても、このような計算は実行されていない(先述のように 8 個ばかりの連分数について収束性が論じられている程度である)。以上の成果は、蛭子彰仁との共著として Ramanujan J. 誌に出版された。
なお、本研究課題で開発した離散ラプラス法は、更なる一般化が期待される。それは、許容するシフトベクトルの条件をより一般化することや、超幾何和に独立変数の導入を許容すること、更には独立変数の多変数化を試みることなどである。また上述のように 2F1 の Gauss 連分数についても、その打切り誤差の主要項を決定した文献は見当たらないので、これを決定する必要がある。これらのことは、本研究に続く研究課題として取り組むべきテーマである。
さて、2F1 超幾何関数のガンマ乗積表示に関する研究については、先に得ていた結果が Indag. Math. 誌から出版された。これは、データ λ=(p,q,r;a,b;x)が中央領域に属するとき、対応する超幾何級数 f(λ;w):=2F1(pw+a,qw+b;rc;x)がガンマ乗積表示をもつための必要条件をλの言葉で述べたものである。その条件は算術的なものであり、p,q,r は整数や半整数でなければならず、a,b は有理数、x は代数的数でなければならない、また p,q,r が与えられたとき、可能な a,b,z をすべて決定するアルゴリズムが存在するといったタイプの結果である。また、データλが中央領域の境界にあるときに、f(w;λ)がガンマ乗積表示をもつための必要条件を求めた。この結果は、日下部と研究代表者により函数方程式論サマーセミナーで発表された。
パンルヴェ方程式については、これまでの研究を振り返って総括し、この方程式が持つ重要な性質であるパンルヴェ性や非線形モノドロミーの大域的理解に至るための展望について構想した。代数幾何学やモデュライ理論的な部分については、北海道大学幾何学コロキウムで講演を行い、代数曲面上の力学系や周期点・周期解の関する部分については、玉原特殊多様体研究集会で講演を行った。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕(計 3 件)

① Akihito Ebisu, Katsunori Iwasaki, Contiguous relations, Laplace's methods, and continued fractions for 3F2(1), The Ramanujan Journal, 査読有, 49 巻 1 号, 2019, 159-213.
DOI:10.1007/s11139-018-0039-2
② Akihito Ebisu, Katsunori Iwasaki, Three-term relations for 3F2(1), Journal of Mathematical Analysis and Applications, 査読有, 463 巻 2 号, 2018, 593-610.
DOI:10.1016/j.jmaa.2018.03.034
③ Katsunori Iwasaki, Hypergeometric series with gamma product formula, Indagationes Mathematicae, 査読有, 28 巻 2 号, 2017, 463-493.
DOI:10.1016/j.indag.2016.12.001

〔学会発表〕(計 11 件)

① 岩﨑 克則, 離散最急降下法とガウス連分数 Discrete steepest descent method and Gauss continued fraction, アクセサリーパラメータ研究会, 熊本大学, 熊本市, 2019.
② 岩﨑 克則, 超幾何関数の離散鞍点法とその応用, 微分方程式の逆問題をめぐって, 東京海洋大学, 東京都港区, 2019.
③ 岩﨑 克則, 超幾何連分数の漸近展開, 第 12 回玉原特殊多様体研究集会, 東京大学玉原国際セミナーハウス, 沼田市, 2018.
④ 岩﨑 克則, 超幾何連分数の誤差評価 Error estimates for hypergeometric continued fractions, アクセサリーパラメータ研究会, 熊本大学, 熊本市, 2018.
⑤ 岩﨑 克則, 超幾何級数の離散鞍点法とその応用, 超幾何方程式研究会 2018, 神戸大学, 神戸市, 2018.
⑥ 岩﨑 克則, 代数曲面上の双有理写像の周期点とパンルヴェ方程式の周期解, 第 11 回玉原特殊多様体研究集会, 東京大学玉原国際セミナーハウス, 沼田市, 2017.
⑦ 岩﨑 克則, 超幾何級数の漸近挙動と離散鞍点法, ポスター発表, 超幾何学校 2017, 小樽商科大学, 小樽市, 2017.
⑧ 蛭子 彰仁, 岩﨑 克則, ガンマ和はガンマ積で表せない, 超幾何方程式研究会 2017, 神戸大学, 神戸市, 2017.
⑨ 岩﨑 克則, 超幾何連分数について, 第 10 回玉原特殊多様体研究集会, 東京大学玉原国際セミナーハウス, 沼田市, 2016.
⑩ 日下部 美奈, 岩﨑 克則, 境界領域における超幾何関数のガンマ乗積表示について, 函数方程式論サマーセミナー2016, いこいの村能登半島, 石川県志賀町, 2016.
⑪ 岩﨑 克則, パンルヴェ方程式の幾何学, 幾何学コロキウム, 北海道大学, 札幌市, 2016.

６．研究組織

(2)研究協力者
研究協力者氏名：蛭子 彰仁
ローマ字氏名：Akihito Ebisu