

令和 5 年 6 月 6 日現在

機関番号：32702

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2016～2022

課題番号：16K05173

研究課題名（和文）標準形理論による可積分系の剛性と大域構造の解析

研究課題名（英文）Analysis of rigidity and global structure for integrable systems by using normal form theory

研究代表者

伊藤 秀一（ITO, Hidekazu）

神奈川大学・工学部・教授

研究者番号：90159905

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,400,000円

研究成果の概要（和文）：可積分系および通常より過剰な個数の第一積分をもつ超可積分系と呼ばれる系の解構造について剛性との関わりで研究した。とくに、超可積分な解析的シンプレクティック写像族の共鳴不動点の近傍におけるパーコフ標準化について詳しく調べた。その結果、この族に対する不動点の共鳴度を適切に定義することにより、この写像族がそれに対応する個数の過剰な解析的第一積分をもつならば、この不動点の近傍でこの力学系が明示的に解けるようなシンプレクティック座標が取れることを明らかにした。

研究成果の学術的意義や社会的意義

ニュートン力学の誕生から今日に至るまで、運動方程式の解の構造をよりよく理解することは自然科学の基本的な問題意識の一つである。その意味で可積分系と呼ばれる力学系の研究の意義がある。本研究は、ケプラー問題に代表される超可積分系に対して、その特異点の近傍における解構造をシンプレクティック写像に対するパーコフ標準形理論を展開することにより明らかにし、（超）可積分系のもつ剛性と呼ばれる性質を見出したことに意義がある。

研究成果の概要（英文）：We studied the structure of solutions from the viewpoint of rigidity for integrable systems or superintegrable systems possessing larger number of integrals than usual case. In particular, we investigated the Birkhoff normalization of a family of superintegrable analytic symplectic maps near a resonant fixed point. We defined the resonance degree of the fixed point appropriately and showed that, if this family of maps possesses the same excessive number of analytic integrals as the resonance degree, there exists a system of symplectic coordinates in which the family of maps can be solved explicitly.

研究分野：力学系理論

キーワード：ハミルトン力学系 可積分系 パーコフ標準形 シンプレクティック写像 超可積分系 剛性

1. 研究開始当初の背景

ハミルトン力学系は古典力学の運動を記述する重要な力学系であり、豊かな数学的構造をもつ研究対象である。とくに、自由度の個数だけの関数的に独立でポアソン可換な第一積分の存在によって定義される (Liouville の意味での) 可積分系とその摂動理論は今日までさまざまな研究を生んできた。天体力学の方程式に代表される多くの興味深い系が可積分系の摂動の形で与えられることを考えると、可積分系の解の大域的構造の理解は重要な問題である。可積分系の解は第一積分のレベル集合上を動くが、これらの第一積分のつくるモーメント写像は一般に特異点をもつので、それら特異点の近傍における解の構造を理解することが解の大域的構造を知る上で重要である。そして、このような特異点近傍における解の挙動は、パーコフ標準形を用いて調べられることから、可積分性とパーコフ標準化の関係の理解が基本的な問題になる。

これについては、非共鳴平衡点の近傍で解析的な可積分系において解析的パーコフ標準化ができることを示した本研究代表者による結果や、滑らかな関数の範疇における L.H.Eliasson による結果が知られていたが、2005 年に N.T.Zung は解析的な可積分系では一般の共鳴平衡点においてもそのような解析的パーコフ標準化ができることを示した。しかしながら、共鳴平衡点におけるパーコフ標準形は一般には求積可能性を意味しないため、単にパーコフ標準化によって解構造が明らかになるわけではない。そのため、共鳴平衡点の近傍でも何らかの意味で求積可能な座標の存在を示すことが興味深い問題になる。実際この観点から、本研究代表者は共鳴平衡点であっても、その共鳴度と同じだけ過剰な個数の第一積分を持つ解析的ハミルトン系では解析的なパーコフ標準化ができて、系が求積できることを示していた。しかし、その結果を一般化して (超) 可積分系の特異点近傍での求積可能な座標を導入することは十分に行われていなかった。

また、ハミルトン系に対する (Liouville の意味での) 可積分性の定義は O.I.Bogoyavlenskij によって一般のベクトル場の場合に拡張され、可換なベクトル場と第一積分の存在によってその可積分性が定義される。この意味で可積分な解析的ベクトル場に対しても、Zung による上記の結果が拡張され、解析的ポアンカレ-デュラック標準化ができることが知られているが、上に述べたのと全く同様に、それは求積可能性を意味するものではなかった。これに対しても、本研究代表者は、ベクトル場の超可積分性の観点からの研究や Zung の結果の別証明などの成果を得ていた。

本研究は、これらの研究をさらに発展させるとともに、可積分系の摂動問題研究の新たな展開をめざしたものである。

2. 研究の目的

本研究の目的は、可積分 (ハミルトン) 系を十分な個数の第一積分の存在によって捉え、それら第一積分のつくる写像の特異点近傍における解構造を標準形理論を通じて明らかにし、可積分系の大域的な解構造の幾何学的理解を追求すること、ならびにそれを足掛かりとして可積分系の摂動問題研究を展開することにある。とくに、Liouville の意味での可換な可積分系のみならず、超可積分系など非可換な可積分系も取り扱い、それらの特異点におけるベクトル場やポアンカレ写像に対する標準形について、線形部分の固有値が重複固有値を持つ場合を含めた共鳴状態の場合の一般論の構築と、それによる (超) 可積分系の解の大域的構造の理解をめざしている。また、ハミルトン系以外の一般のベクトル場や離散可積分系についても同様の手法を追求し、さらに、それらの摂動系に対する準周期解を載せたさまざまな次元の不変トーラスの大域的な分岐問題と、それらの近傍における解の安定性・不安定性について、変分的手法も加えた多角的なアプローチによる理解を目標としている。

3. 研究の方法

本研究を進めるための方法としては、個人研究が基礎になるが、それを推進するためには、研究代表者と分担者間の緊密な研究連絡、および国内外の研究者との情報交換が不可欠である。また、ヨーロッパにはハミルトン力学系の研究者が多く、それらの研究者を訪問し討論を行うことや、国際研究集会に参加し自らの成果を発表し批評を受けること、ならびにそれらの機会を利用して研究情報の交換を行うことは、本研究を進めて行く上できわめて重要なものである。

以上の観点から、研究分担者とは、国内での研究集会等の機会を利用してさまざまな討論を行ったほか、京都、金沢を相互訪問する機会をもった。また、2017年10月にはイタリアで開催された L. Chierchia 教授(ローマ第3大学)の還暦記念研究集会に参加、講演を行い、L.Chierchia 教授はじめ参加者との交流を通じて研究討論を行う機会をもった。このほか、2017年3月に別用務で来日した L.H.Eliasson 教授(パリ第7大学)との討論および2019年11月に研究集会参加のため来日した L.Stolovitch 教授(CNRS, ニース大学)との討論は本研究を進める上で大いに役立った。その後もヨーロッパを訪問して成果発表や研究討論の機会、あるいは本研究の評価をしてもらう予定であったが、残念ながら新型コロナ感染拡大のため果たせなかった。

4. 研究成果

(1) 超可積分ハミルトン系の第一積分のつくる写像の特異点を通る軌道は、それが階数 k でコンパクトならば k 次元不変トーラスであり、それらは一般に k 個のパラメータに依存する族をつくる。この近傍で「求積できる座標」を導入するために、この k 次元不変トーラスに付随したポアンカレ写像をモデルとして、パラメータに依存した解析的なシンプレクティック写像族のバーコフ標準化を考えた。この族に含まれる各シンプレクティック写像は不動点をもつが、その共鳴度はパラメータとともに変化するため、一見するとこの族そのものが解析的な変換でバーコフ標準化できることは望めないようにも思える。それは一般的な描像であるが、本研究において、可積分系ではそれが可能になることを示した。すなわち、不動点の近傍で定義された解析的な $2n$ 次元シンプレクティック写像族に対して、不動点の共鳴度が適切に定義できて、その共鳴度を q とするとき、写像族が $n+q$ 個の関数的に独立な第一積分をもつならば、写像族の線形部分はパラメータに関して解析的な線形シンプレクティック変換で対角化可能であり、さらにパラメータに依存する解析的なバーコフ標準化変換が存在して、写像族の定める力学系が求積されるような座標を導入できること、とくにこの写像族は $n-q$ 個の変数に依存する関数のハミルトン流の時間 1 写像として書けることを明らかにした。ただし、写像族の不動点における線形部分のすべての固有値はパラメータについて解析的であるという仮定が必要である。この結果は(超)可積分系の持つ剛性を表している。なお、以上において $n+q$ 個の第一積分の間でポアソン可換性に関する仮定は不要であり、過剰な個数の第一積分の存在によって通常の意味での Liouville 可積分性が得られることになる。

この結果は一つのシンプレクティック写像族に対するものであるが、可積分系のモデルの観点からすると、複数個の可換なシンプレクティック写像族の組について、それらすべてが同時に解ける座標をもつことが期待される。それらの写像族に対しては、不動点の共鳴度は一般にそれぞれ異なるが、それにもかかわらず k 個の可換なシンプレクティック写像族の中に一つでも線形部分の固有値が相異なるものが存在するならば、それらすべてが解ける座標を導入できることを示した。

これらの結果は複素解析的な範疇で得られるが、Liouville-Arnold の定理をモーメント写像の特異点近傍に拡張するためには、求積できる座標として実解析的なものが得られなければならない。これについて、上記の結果の証明に実数性条件を課すことによって一般的結果を得た。すなわち、 k 次元不変トーラスに対応するポアンカレ写像の不動点における線形部分の固有値のタイプによらずに解ける座標を導入することができた。その際、特異点についての非退化性の制限の下で得られた Miranda-Zung による先行研究での仮定と同様に、可換な写像に対する不動点の型(の個数)についての制限が必要になった。なお Miranda-Zung の結果では、特異点が非退化という仮定のもとで得られるため、証明の核心である標準化変換を行う際に、ある線形部分の固有値が非共鳴になる構造が隠されている。本研究ではそのような「隠れた非共鳴性」がなくとも求積できる状況を明らかにしている。一方、固有値がパラメータに解析的に依存するという仮定ならば可換なシンプレクティック写像の線形部分の中に固有値が相異なるものが存在するという仮定が必要であり、これは線形部分の「隠れた単純性」を意味すると考えられる。

(2) 以上の結果は、力学系的観点から自然な仮定のもとで求積可能な座標の導入を可能にするものであり、Zung によって開発されたトーラス作用にもとづくアプローチが幾何学的と言えるのと対照的である。また、ポアソン可換性をうけない。そのため、ここで超可積分系と呼んでいる系は非可換可積分系ともいえ、与えられた第一積分を平等に扱うのではなく、それらの中で核となるものを取り出して、その持つ正則性(剛性)を通じて可積分系を考察したものになっている。その証明は初等的な議論の積み重ねによって行われる。なお、本研究では解析的な(超)可積分系のみを考えており、そのため得られた成果には解析関数の剛性に依拠する面もある。そ

の意味で、滑らかな範疇での（超）可積分系の剛性を追求することが今後の課題になるう。

また、本研究の当初の目的の一つであった超可積分系の摂動問題に対する不変トーラスの存在については成果を得ることができなかったが、研究の過程で自由度 2 の近可積分系として、摂動パラメータの増加に対して、きわめて長く生き残る不変トーラスの数値計算例に遭遇した。そのメカニズムを解明することも今後の課題となった。

(3) 可積分系の摂動に対する不変トーラスの存在問題について、研究分担者は円筒面上で定義された面積保存なねじれ写像について、その変分構造に着目し、不変曲線が存在するための必要条件を導き、不変曲線が存在しないための十分条件を導いた。これは、ねじれ写像の持つ変分構造からのアプローチで不変曲線の存在・非存在に関わる新たな条件を求めたことになる。また、研究分担者は可積分系に関連する問題として、特別なポテンシャルを持つ平面 3 体問題に対して、従来用いられてきた特殊解とは異なる特殊解に着目し、その変分方程式に対する Morales-Ramis 理論（微分ガロア理論）を応用することで非可積分性の判定条件を導いた。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計3件（うち査読付論文 1件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 2件）

1. 著者名 Hidekazu Ito	4. 巻 -
2. 論文標題 Birkhoff normalization for a family of superintegrable symplectic maps and its application	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 数理解析研究所講究録	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 東浜有輝、柴山允瑠	4. 巻 2223
2. 論文標題 面積保存ツイスト写像の不変曲線が存在しないための十分条件	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 数理解析研究所講究録	6. 最初と最後の頁 58 ~ 66
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Shibayama Mitsuru, Yamada Junji	4. 巻 26
2. 論文標題 Nonintegrability of the Reduced Planar Three-body Problem with Generalized Force	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Regular and Chaotic Dynamics	6. 最初と最後の頁 439 ~ 455
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1134/S1560354721040079	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計20件（うち招待講演 6件/うち国際学会 4件）

1. 発表者名 伊藤秀一
2. 発表標題 シンプレクティック写像族のバーコフ標準化とハミルトン系の超可積分性
3. 学会等名 日本数学会2023年年会函数方程式論分科会
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 柴山允瑠
2. 発表標題 Computer-assisted proof for non-existence of invariant closed curves for the standard maps
3. 学会等名 2022年度冬の力学系研究集会
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 柴山允瑠、東浜有輝
2. 発表標題 面積保存ツイスト写像の不変曲線の非存在証明
3. 学会等名 応用数学会 正会員主催OS「応用力学系」
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 柴山允瑠
2. 発表標題 面積保存ツイスト写像の不変曲線が存在しないための十分条件
3. 学会等名 RIMS研究集会「力学系の理論と諸分野への応用」
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 伊藤秀一
2. 発表標題 共鳴不動点近傍におけるシンプレクティック写像族の超可積分性とバーコフ標準化
3. 学会等名 2021年度冬の力学系研究集会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 伊藤秀一
2. 発表標題 Birkhoff normalization for a family of superintegrable symplectic maps and its application
3. 学会等名 RIMS 共同研究 (公開型) 「幾何構造と微分方程式 -対称性・特異点及び量子化の視点から-」 (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 柴山允瑠
2. 発表標題 トラス上の面積保存写像の母関数の多価性と周期点の個数評価
3. 学会等名 RIMS 研究集会「数理学の諸問題と力学系理論の新展開」
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 伊藤秀一
2. 発表標題 可積分系の剛性とバーコフ標準形をめぐって
3. 学会等名 第7回「ハミルトン系とその周辺」研究集会 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 柴山允瑠
2. 発表標題 平面 Sitnikov 問題における記号列を実現する軌道と周期軌道の存在
3. 学会等名 日本数学会秋季総合分科会函数方程式論分科会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Hidekazu Ito
2. 発表標題 Action-angle coordinates near singularities for noncommutatively integrable Hamiltonian systems
3. 学会等名 Conference on PDEs, Dynamical Systems and Probability (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Mitsuru Shibayama
2. 発表標題 Non-integrability of the spatial n-center and restricted n+1-body problem
3. 学会等名 Hamiltonian systems, from topology to applications through analysis II (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 山田淳二、柴山允瑠
2. 発表標題 一般的な相互作用力による平面三体問題の非可積分性について
3. 学会等名 日本数学会2019年度年会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 伊藤秀一
2. 発表標題 ベクトル場と写像に対する可積分性と標準形理論
3. 学会等名 「微分方程式と幾何学」研究集会, 立命館大学理工学部 (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Hidekazu Ito
2. 発表標題 Birkhoff normalization of non-commutatively integrable symplectic maps and its applications
3. 学会等名 "Analysis and Dynamics" Conference in occasion of Luigi Chierchia's 60th birthday (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Mitsuru Shibayama
2. 発表標題 Non-integrability of the restricted n-body problem
3. 学会等名 RIMS研究集会「界面運動，力学系に現れる漸近問題への粘性解的手法とその周辺」(招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 柴山允瑠
2. 発表標題 シンプレクティック写像の不動点のモース指数と安定性
3. 学会等名 天体力学N体力学研究会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 柴山允瑠
2. 発表標題 平面Sierpinski問題における記号力学系と変分構造
3. 学会等名 天体力学N体力学研究会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Hidekazu Ito
2. 発表標題 Normal form theory from the viewpoint of integrability near elliptic equilibria
3. 学会等名 第6回「ハミルトン系とその周辺」研究集会(国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Mitsuru Shibayama
2. 発表標題 Non-integrability of the restricted n-body problem
3. 学会等名 第6回「ハミルトン系とその周辺」研究集会(国際学会)
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究 分 担 者	柴山 允瑠 (SHIBAYAMA Mitsuru) (40467444)	京都大学・情報学研究科・准教授 (14301)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------