

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 3 年 6 月 11 日現在

機関番号：24402

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2016～2020

課題番号：16K05174

研究課題名(和文)凸錐上の調和解析とその応用

研究課題名(英文)Harmonic analysis on convex cones and its applications

研究代表者

伊師 英之(Hideyuki, Ishi)

大阪市立大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：00326068

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,300,000円

研究成果の概要(和文)：等質錐(線型リー群が推移的に作用する開凸錐)とコーダルグラフィカルモデルに現れる凸錐は、両方とも豊かな解析が展開できる凸錐として知られてきた。本研究では、これらの凸錐をサブクラスとして含むような、実対称行列からなる凸錐の新しいクラスを発見し、それらの上の調和解析を研究した。それに関連する結果として、表現論・実解析・複素解析、さらには数理統計、最適化、情報幾何といった分野でも成果を上げた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究は、線型な制約条件を課した正定値実対称行列の研究が主題であり、数理統計(とくに多変量正規分布の分散の推定問題)や最適化法(半正定値計画法の一般化)に様々な応用がある。実際、本研究で考察してきた問題はそれらの分野から刺激や動機づけを得て取り組んできたものが多い。そして研究成果を得る過程で、統計学者や応用数学者との共同研究を活発に行い、コミュニティを超えたネットワークを構築できたことも大きな収穫であった。

研究成果の概要(英文)：A homogeneous cone is an open convex cone on which a linear Lie group acts transitively. It is known that one can develop rich analysis on the homogeneous cones as well as convex cones appearing in the chordal graphical models. In this research project, I find a new wide class of convex cones containing both the homogeneous cones and chordal graphical models, and I investigate harmonic analysis on these cones. Relating to the new theory, I obtain results in various areas such as representation theory, real analysis, complex analysis, mathematical statistics, optimization, and information geometry.

研究分野：非可換調和解析，表現論，複素解析，多変量解析

キーワード：ウィシャート分布 正定値対称行列 等質錐 グラフィカルモデル ヘッセ幾何 可解リー群 リース超関数

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

## 1. 研究開始当初の背景

直線を含まない開凸錐で、あるリー群が線型かつ推移的に作用するものを等質錐とよぶ。正定値実対称行列全体のなす錐  $\text{Sym}^+(N, \mathbb{R})$  は、等質錐の典型例である。錐  $\text{Sym}^+(N, \mathbb{R})$  は、半直線の自然な多次元化として数学の様々な場面に現れる。とくに 関数の多次元化としての  $\text{Sym}^+(N, \mathbb{R})$  上の 型積分は Wishart (統計学), Siegel (解析数論), Garding (偏微分方程式) によって研究され、それぞれの分野で重要な役割を演じた。なお  $\text{Sym}^+(N, \mathbb{R})$  は等質性に加えて「自己双対性」も備えた対称錐である。対称錐は、表現論、非可換調和解析、概均質ベクトル空間、保型函数論、微分幾何といった純粋数学の広範な分野のみならず、数理統計や凸計画法といった応用数学との関連においても活発な研究が展開されている。一方、対称とは限らない一般の等質錐については、Vinberg による基礎理論の構築の後、Gindikin によって等質錐上の解析学における数々の興味深い結果が得られた。なかでも等質錐上の 型積分公式を証明し、Garding の議論の一般化として 相対不変多項式のベキ乗の積をラプラス変換とするような超函数の族 (リース超函数) を導入し、それをを用いて様々な微分作用素の基本解を構成したことは重要である。私はリース超函数が正の測度となる必要十分条件を与え、そこで得られる正の測度を全て明示的に記述した。この仕事は様々な分野の研究者に引用されており、私自身もリー群の表現論、複素幾何、そして数理統計に結果を応用した。さらに私は、等質錐の基本相対不変式を計算するアルゴリズムも与えており、これによってリース超函数を基本解に持つような微分作用素は全て決定されたことになる。当初は正規  $j$  代数や左対称代数を道具として等質錐を研究していたが、全ての等質錐が  $\text{Sym}^+(N, \mathbb{R})$  の部分集合として、三つの公理を満たすベクトル空間の族から構成できることを示した後は、この行列実現の方法を利用して成果を得ている。

さて、数理統計においては Wishart の仕事を発展させて、指定された成分を 0 とする対称行列 (これは多次元正規分布に条件付き独立性を指定することを意味する) からなる  $\text{Sym}^+(N, \mathbb{R})$  の部分錐上の解析が、詳しく研究されてきた。ゼロ成分の位置は単純グラフによって指定されるが (グラフィカルモデル)、単純グラフが chordal なる性質をもつときに対応する凸錐上の解析が著しく扱いやすくなることが認識されている。近年、この扱いやすい凸錐 (以下簡単のために「chordal な凸錐」とよぶことにする) に対して、等質錐の場合と良く似た 型積分の公式が得られた (Roverato 2000, Letac-Massam 2007)。なおグラフィカルモデル理論に現れる凸錐が等質錐である必要十分条件は、Letac と Massam によって証明無しに主張され、私が完全な証明を与えた。その結果、多くの chordal な凸錐が確かに等質錐でないことが判ったが、等質性無しに 型積分公式が成り立つことは私にとっては実に驚くべきことであった。しかし Roverato たちの証明には複雑な計算と統計学的なアイデアが用いられており、当然あるべき等質錐の解析との関連は全く謎に包まれていた。私は、等質錐の行列実現で設定した三つの公理のうち一つを外すと等質性は失われるが 型積分公式など解析の主要部分は依然成立すること、そしてこの特別な場合として、まさに chordal な凸錐が含まれていることを発見した。これが本研究の着想の出発点である。

## 2. 研究の目的

前項で述べた 2 つの公理で規定された広範なクラスの凸錐 (以下簡単のために「新クラスの凸錐」と呼ぶ) 上での 型積分公式と関連する調和解析を展開し、その数理統計や情報幾何への応用を考察する。具体的には、線型な制約条件を加えた正定値対称行列全体の集合のなす凸錐上で行列式の巾乗のラプラス変換が、有理式の負巾乗とガンマ因子の積になること、さらにその有理式が行列式の乗法的ルジャンドル変換になることを観察し、それらの計算結果を指数型分布族の数理統計と情報幾何に応用する。

## 3. 研究の方法

考える設定は、特定のブロック分解をもつ正定値実対称行列からなる凸錐  $P$  と、その双対錐  $Q$  である。凸錐  $P$  上の正值函数として、行列式の巾乗のラプラス変換および乗法的ルジャンドル変換を考える。さらに行列式対数は狭義凸函数であり、そのヘッセ行列は凸錐  $P$  上のリーマン計量 (ヘッセ計量) を定める。この計量はリーマン対称空間としての  $\text{Sym}^+(N, \mathbb{R})$  上の計量の一般化であり、その上の微分幾何を展開することが課題となる。実際、凸錐  $P$  を  $Q$  上のウィシャート分布のパラメータ集合とみなしたとき、問題の計量はフィッシャー計量に他ならず、情報幾何の枠組みを通して、その幾何学を数理統計および最適化理論に応用することを目指す。

## 4. 研究成果

本研究期間中に学術論文として発表した成果は以下の通りである。

- (1) 上述の新クラスの凸錐上の解析の基礎理論 (ラプラス変換と乗法的ルジャンドル変換) を確立した (Entropy 18, 2016)。これによって、等質錐と chordal なグラフィカルモデルの理論の関係が明らかになり、アイデアの相互乗り入れが可能となった。とくに、

等質錐の研究の道具やノウハウをグラフィカルモデルに応用できることは意義が大きい。

- (2) 三重対角正定値対称行列のなす凸錐とその双対錐は、非等質錐ではあるが種々の明示的な公式が成り立つ例であり、(1)で得られた結果よりさらに詳しい解析が可能である。これらの凸錐に関して、我々は Letac と Massam が提示した実解析の予想（認容的なラプラス変換の公式が我々の得たものに限るといもの）を部分的に解決し（Proc. Japan Acad. Ser. A 93, 2017）、一方で統計への応用をまとめた学術論文を発表した（Ann. Inst. Stat. Math. 71, 2019）。これらは P. Graczyk 氏、S. Mamane 氏、落合啓之氏との共同研究である。
- (3) 等質錐上のウィシャート分布は、等質錐に作用する群に関して自然な不変性をもつが、逆に与えられた群不変性をもつ指数型分布族としてウィシャート分布を特徴づけることに成功した（Colloq. Math. 158, 2019）。一方、この等質錐上のウィシャート分布の分散関数を、期待値パラメータの有理関数として明示的に表示する公式を得た（Probab. Math. Statist. 39, 2019）。どちらの仕事でも等質錐の行列実現の方法の見通しの良さが決定的な役割を果たしている。これらは P. Graczyk 氏と B. Kolodziejek 氏との共同研究である。
- (4) 等質錐の行列実現の枠組みを拡張して、全ての単連結な等質ヘッセ多様体を対称行列の集合として実現することに成功した（Lecture Notes in Comput. Sci. 10589, 2017）。この成果は、群が推移的に作用する自然指数型分布族の分類という今後の研究の基礎になるであろうと期待される。
- (5) 有界等質領域上のハルトークス領域のベルグマン核関数を明示的に計算し、その零点の有無を調べた（J. Geom. Anal. 27, 2017）。ハルトークス領域のベルグマン核の求積法としては、底となる有界等質領域の重み付きベルグマン核に付随する Hua 多項式を利用する方法を採った。この Hua 多項式が等質錐に付随する 関数の比として得られることがポイントである。実は類似の多項式がウィシャート分布の尤度比検定にも現れるところが大変面白い。これは J.-D. Park 氏と山盛厚伺氏との共同研究である。
- (6) 直線を含まない開凸錐を底とする複素管状領域上の正則関数のなすハーディ空間と双対錐上の  $L_2$  空間との間にフーリエ・ラプラス変換によってユニタリ作用素が構成できるというペイリー・ウィナー型の定理は古くから知られている。我々は、この定理を非凸錐に拡張する枠組みを与えた（J. Lie Theory 28, 2018）。ここでは管状領域上の正則関数ではなく、解析的 Cech コホモロジーがフーリエ・ラプラス変換を用いて表示される。一般的な枠組みは与えられたが、より具体的な対象についての詳しい研究、とくに等質領域の場合における解析と表現論への応用は今後の課題である。これは S. Gindikin 氏との共同研究である。

以上のほかに、学術論文としては未発表であるが最も重要な成果として、コレスキ分解に関して Fill-in free なスパース行列のもつ良い性質に着目し、実対称行列からなるベクトル空間について「コレスキ構造」および「準コレスキ構造」なる概念を導入したことが挙げられる。これは先述の「新クラスの凸錐」を含み、しかも遥かに自然なクラスである。そして置換対称性を要請した chordal グラフィカルモデル（色付き chordal グラフィカルモデル）が準コレスキ構造をもち、したがって綺麗な計算が可能であることが判明した。これらの成果は、我々の研究が豊かな数理を展開する正しい方向に進んでいることを強く示唆するものである。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計10件（うち査読付論文 10件 / うち国際共著 8件 / うちオープンアクセス 2件）

1. 著者名 Edi Kurniadi and Hideyuki Ishi	4. 巻 290
2. 論文標題 Harmonic analysis for 4-dimensional real Frobenius Lie algebras	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Springer Proceedings in Mathematics and Statistics	6. 最初と最後の頁 95--109
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/978-3-030-26562-5_4	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Hideyuki Ishi and Bartosz Kolodziejek	4. 巻 158
2. 論文標題 Characterization of the Riesz Exponential Family on homogeneous cones	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Colloquium Mathematicum	6. 最初と最後の頁 45--57
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4064/cm7548-9-2018	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Piotr Graczyk, Hideyuki Ishi and Bartosz Kolodziejek	4. 巻 39
2. 論文標題 Wishart laws and variance function on homogeneous cones	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Probability and Mathematical Statistics	6. 最初と最後の頁 337--360
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.19195/0208-4147.39.2.6	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Ohara Atsumi, Ishi Hideyuki	4. 巻 252
2. 論文標題 Doubly Autoparallel Structure on the Probability Simplex	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Springer Proceedings in Mathematics and Statistics	6. 最初と最後の頁 323 ~ 334
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/978-3-319-97798-0_12	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Ishi Hideyuki	4. 巻 10589
2. 論文標題 Matrix Realization of a Homogeneous Hessian?Domain	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Lecture Notes in Computer Science	6. 最初と最後の頁 195 ~ 202
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/978-3-319-68445-1_23	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Graczyk Piotr, Ishi Hideyuki, Mamane Salha	4. 巻 -
2. 論文標題 Wishart exponential families on cones related to tridiagonal matrices	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Annals of the Institute of Statistical Mathematics	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s10463-018-0647-z	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Simon Gindikin, Ishi Hideyuki	4. 巻 28
2. 論文標題 Cohomological Laplace transform on non-convex cones and Hardy spaces of $\bar{d}$ -cohomology on non-convex tube domains	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Journal of Lie Theory	6. 最初と最後の頁 245~263
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Hideyuki Ishi	4. 巻 18
2. 論文標題 Explicit formula of Koszul-Vinberg characteristic functions for a wide class of regular convex cones	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Entropy	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3390/e18110383	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Hideyuki Ishi, Jong-Do Park and Atsushi Yamamori	4. 巻 27
2. 論文標題 Bergman kernel function for Hartogs domains over bounded homogeneous domains	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Journal of Geometry Analysis	6. 最初と最後の頁 83,93
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s12220-016-9737-4	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Piotr Graczyk, Hideyuki Ishi, Salha Mamane, and Hiroyuki Ochiai	4. 巻 93
2. 論文標題 On the Letac-Massam Conjecture on cones $Q_{\{A_n\}}$	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Proceedings of the Japan Academy, Series A	6. 最初と最後の頁 16,21
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3792/pjaa.93.16	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計7件 (うち招待講演 4件 / うち国際学会 4件)

1. 発表者名 Hideyuki Ishi
2. 発表標題 Siegel-Gindikin integrals over regular open convex cones
3. 学会等名 Advances in the Geometric and Analytic Theory of Convex Cones (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年 ~ 2020年

1. 発表者名 Hideuki Ishi
2. 発表標題 A promenade from Kahler Geometry to Information Geometry
3. 学会等名 The 13th Korean conference on Several Complex Variables (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年 ~ 2020年

1. 発表者名 Hideyuki Ishi
2. 発表標題 Open orbits and primitive zero ideals for solvable Lie algebras
3. 学会等名 6th Tunisian-Japanese Conference `Geometric and Harmonic Analysis on Homogeneous Spaces and Applications' (国際学会)
4. 発表年 2019年～2020年

1. 発表者名 Ishi Hideyuki
2. 発表標題 On homogeneous exponential family
3. 学会等名 Information Geometry and Affine Differential Geometry III (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 伊師英之
2. 発表標題 凸錐上の型積分
3. 学会等名 日本数学会 (招待講演)
4. 発表年 2017年～2018年

1. 発表者名 Hideyuki Ishi
2. 発表標題 Wishart laws for a wide class of regular convex cones
3. 学会等名 Mathematical Methods of Modern Statistics (招待講演)
4. 発表年 2017年～2018年

1. 発表者名 伊師英之, 小原敦美
2. 発表標題 ヘッセ領域上の群不変ポテンシャル
3. 学会等名 日本数学会 函数解析学分会
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計1件

国際研究集会 6th Tunisian-Japanese Conference 'Geometric and Harmonic Analysis on Homogeneous Spaces and Applications'	開催年 2019年 ~ 2020年
---	----------------------

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------