

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 2 年 6 月 10 日現在

機関番号：12101

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2016～2019

課題番号：16K05189

研究課題名(和文)古典的不等式の精密化に基づく非線型楕円型方程式の定性的研究

研究課題名(英文)Qualitative study of nonlinear elliptic equations based on refinement of classical inequalities

研究代表者

堀内 利郎(Horiuchi, Toshio)

茨城大学・理工学研究科(理学野)・教授

研究者番号：80157057

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,400,000円

研究成果の概要(和文)：一般化された  $p$ -ラプラス作用素  $A$  に対するHardy型不等式、Sobolev不等式、加藤の不等式とCKN型不等式を中心に重み付き古典的不等式の精密化の基礎的研究が精力的に行われた。具体的には以下の研究が行われた：(1) 作用素 $A$ に対する測度値の加藤の不等式の確立、 $A$ を主要部とする準線型楕円型作用素に対する強最大値原理と逆最大値原理、(2)  $p$ -ラプラシアンに対する領域の境界まで込めた加藤の不等式、(3)  $p=1$ と臨界の場合のCKN型不等式の確立、(4) 1次元Hardy不等式を片側境界条件の下で確立し、境界からの距離のべきを重みとする弱Hardy型の不等式を導入し変分問題に応用した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

学術的意義を具体的に述べる：(1)適切に許容空間を設定することにより準線型楕円型作用素に対する強最大値原理と逆最大値原理の証明、境界値問題の解の一意存在性、解の特異性が調べられた。また、許容空間解とRenormalized解との関係が明らかにされた。(2) 準線形の場合に境界まで込めた加藤の不等式が初めて議論された。(3) $p=1$ の場合のCKN型不等式が等周不等式であることに着目し、その証明と対称性の崩れの研究が行われた。(4)すべてのべき型の重みに対してHardy不等式が1次元の片側境界条件の下で確立された。応用として、境界からの距離のべきを重みとする弱Hardy型の不等式が導入された。

研究成果の概要(英文)：Basic research on the refinement of the weighted classical inequalities centered on Hardy inequalities, Sobolev inequalities, Kato's inequalities and CKN-type inequalities for the generalized  $p$ -Laplace operator  $A$  was energetically carried out. Specifically, the following researches were conducted: (1) Establishment of Kato's inequality of measure values for the operator  $A$ , Strong Maximum and Inverse Maximum Principles for quasi-linear elliptic operators with  $A$  as the principal part, (2) Kato's inequalities including the boundary of the domain for  $p$ -Laplacian, (3) Establishment of CKN-type inequalities for  $p = 1$  and critical case, (4) Establishment of one-dimensional Hardy inequalities under one-sided boundary conditions. We introduced weak Hardy type inequalities whose weight are the power of the distance from the boundary and applied them to study variational problem.

研究分野：偏微分方程式論

 キーワード：加藤の不等式 CKN型不等式  $p$ -ラプラシアン 重み付きハーディ不等式 重み付きソボレフ不等式 強最大値原理 逆最大値原理 非線型変分問題

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。

## 様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

本研究は(1) 加藤の不等式、(2) CKN 不等式、(3) 古典不等式のミッシング・タームに関するものである。それぞれに関して研究開始当初の背景を簡潔に述べる。

- (1) 数学及び数理物理学において重要な「加藤の不等式」は加藤敏夫氏によりシュレディンガー作用素  $- \Delta + V(x)$ , ( $V \geq 0$ ) の解析のため導入された不等式で、シュレディンガー作用素の自己共役性の研究に始まり、その有効性は言うまでもない。我々の研究開始時点においては、非線形楕円型作用素に関する加藤の不等式はまだ本格的には始まっていなかった。
- (2) 本研究における CKN 型不等式とは、古典的な重み付きハーディ不等式と重み付きソボレフ型不等式を統一する不等式で、我々の先行研究により一般的に導入されたものである。この理論では重み関数として「原点からの距離のすべての冪」が許容され、冪を非臨界と臨界に分けることで新しい視点から古典不等式を統一的に扱う事ができる。これまでの研究で  $p > 1$  の場合には最良定数を実現する解(extremal) の存在、最良定数のパラメータに関する連続性、対称性の崩れ等が組織的に解明された。また臨界の場合には右辺が対数項を含む異なる形の不等式となる事が解明されている。
- (3) これまでの研究で 対数の無限積を基礎とする Super logarithm が導入されそれを突破口とし重み付きハーディの不等式は可算無限個のミッシング・ターム をもつことが我々の先行研究で示されている。

### 2. 研究の目的

「古典的不等式の精密化に基づく非線形楕円型方程式の定性的研究」を中心課題とし、具体的には有機的に関連する次の3つの研究目的を設定している。

- (1) ラプラシアンに対する加藤の不等式のRadon測度値  $p$  ラプラシアン  $p$  ( $1 < p$ ) への拡張および 準線型楕円型作用素に対する「強最大値原理」の研究の遂行。
- (2) Caffarelli-Kohn-Nirenberg 型不等式 (CKN 型不等式) の精密化と対称性の崩れの研究。
- (3) 古典不等式における精密なミッシング・タームの存在とその応用の研究遂行。

以下では具体的な目的を述べる：

- (1) では、ラプラシアンに関する上記の加藤の不等式をラドン測度値の  $p$  ラプラシアン  $p$  に関する不等式に本質的に拡張し、その応用として準線型楕円型作用素に対する精密な「強最大値原理」の確立を目指す。ここで、想定される新しい「強最大値原理」を簡単に説明する。主張は、 $A(\cdot)$  を領域  $\Omega$  上の適切な許容空間として  $u \in A(\cdot)$ ;  $u \geq 0$ ;  $-\Delta u + a(x)Q(u) \geq 0$  が  $\Omega$  で測度的な意味で成立し、 $u$  がある大きさの零点集合を持てば  $u=0$  が  $\Omega$  で殆ど至る所成立するという事である。線型( $p=2$ )の場合には、この主張は弱一意接続定理ともいわれ既にAncona (1979) 等によりポテンシャル論を用いて研究され、その後 Benilan-Brezis-Ponce (2004) 等により偏微分方程式論の手法で別証明も与えられているが、非線形の場合には部分的な結果が知られているのみである。本研究はこれらの先行研究の直接の延長線上にある。
- (2) では、先行研究において  $p > 1$  の場合には最良定数を実現する解 (extremal) の存在、最良定数のパラメータに関する連続性、対称性の崩れ等が組織的に解明されている。また臨界の場合には右辺が対数項を含む異なる形の不等式となる事が解明されている。これらを基礎とし、我々は次の2つの研究を行った。
  - (a) 非臨界で  $p=1$  の場合の不等式と同値な変分問題の解の存在と対称性の崩れの研究。
  - (b) 臨界指数の CKN 型不等式の精密化と関連する変分問題の解の存在と非存在の研究。

最後に(3)では、先行研究による対数の無限積を基礎とする Super logarithm の導入を突破口とし重み付きハーディの不等式が可算無限個のミッシング・タームをもつこと、(2)の臨界 CKN 型不等式のミッシング・タームの研究を今回から新たに遂行する。

### 3. 研究の方法

まず、各年度を通して加藤の不等式とCKN 型不等式を中心に古典的不等式 (重み付きハーディ不等式、重み付きソボレフ不等式等) の精密化の研究が行われる。次に、それらを基礎に  $p$  を主要部とする準線型楕円型作用素に対する強最大値原理の研究と「 $p = 1$  と臨界の場合のCKN 型不等式」の研究が行われる。これらの研究と同時に「精密化された古典的不等式」を共通の手法とし、非線形退化楕円型作用素の諸問題を対象とし分担者・連携研究者・海外の研究協力者が有機的な関係を深めながら進展を目指して共同研究を行う。具体的には、次の3つの関連する問題の研究を本質的に発展させた。

第1の問題. ラプラシアンに対する加藤の不等式の  $p$  ラプラシアン  $p$  ( $1 < p < \infty$ , Radon測度値) への拡張 および 準線型楕円型作用素に対する「強最大値原理」の研究：研究期間を通して加藤の不等式に関連して次の2つの具体的な研究(a), (b)が遂行される。

- (a) 非線形の場合の新しい「強最大値原理」と「一意接続定理」の提案と証明をする。

最近の研究で得られた「加藤の不等式の  $p$  への拡張」を突破口とし、 $-p u + a(x) Q(u)$  に代表される準線型楕円型作用素に対して、適切な「強最大値原理」を確立する。先ずターゲットの関数  $u$  の零点集合の大きさを  $p$ -容量でコントロールすることで、新しい「強最大値原理」を確立し、非線型楕円型方程式の解に関するに対する精密な一意接続定理を証明することを第一の目標とする。最適な許容空間  $A(\cdot)$  の選択を含め、この研究では「 $p$ -容量の精密な解析とラドン測度の適切な近似理論の構築」が非常に有効であると考えている。

(b)  $p$  に対する加藤の不等式の精密化とRadon測度値の準線型楕円型方程式の可解性の研究をする。ラドン測度が(Diffuse part) と (Concentration part) に一意分解されることを用いて、(a)で用いられる加藤の不等式は精密化することができる。この拡張された強力な不等式を基礎とし、Radon測度値の準線型楕円型方程式の可解性の研究に着手する。既に述べた様に、可解性の研究では線型の場合にBrezis-Poncelにより証明された「逆最大値原理」の非線型バージョンの構築が理論の「鍵」であるが、先ずこの構築を遂行する。

第2の問題. Caffarelli-Kohn-Nirenberg 型不等式 (CKN型不等式) の精密化と対称性の崩れの研究 :

CKN 型不等式に関して、次の2つの具体的な研究 (a), (b) を行った。

(a) 非臨界で  $p=1$  の場合の不等式と同値な変分問題の解の存在と対称性の崩れの研究。

平成30年度までの研究により、次の2点が明らかになった :

(1)  $p=1$  の場合にはCKN型不等式は最良定数を含めてCKN型等周不等式と同値になる。

(2) 鍵となるパラメータの絶対値が大きくなれば必ず対称性の崩れが起こる。

これらを出発点とし、対称性の崩れ起こるプロセスをパラメータとの関連で精密に解明する。特に、対称性の崩れがおこる範囲を可能な限り定量的に解明したい。この問題は、「球対称な重み付きルベーグ測度による同体積の図形の中で表面積が最小のものが球とは限らない」ことを主張しており非常に興味深い。また対称な場合の extremal がソボレフの不等式と同様にBV関数(有界変動関数)になるので、非臨界で  $p=1$  の場合の不等式と同値な変分問題の解の存在を議論するためには重み付きBV関数空間を適切に設定し、その中で concentration-compactness の理論を構築し用いることが必要不可欠であると考えている。一方、 $p>1$  の場合には線型化法が有効であったので、この方面の研究も進める。

(b) 臨界指数のCKN型不等式の精密化と関連する変分問題の解の存在と非存在の研究 :

平成30年度までの研究成果を受けて、2次元以上では臨界指数のCKN型不等式がextremalを持たない事を一般論として証明する。具体的には、 $p=q$  の場合には問題はハーディ不等式のミッシング・タームの存在に帰着する事に着目し、下記の「古典不等式におけるミッシング・タームの存在の研究」と同時進行で遂行される。

第3の問題. 古典不等式における精密な無限個のミッシング・タームの存在と応用の研究 :

重み付きハーディの不等式は精密な可算無限個のミッシング・タームをもつことが Super logarithm 等を用いて平成30年度までの研究で示されている。今後は、この問題を臨界指数のCKN型不等式を含めて考察し、最終的に解決するべく研究を遂行する。

#### 4. 研究成果

各年度の研究成果を順に記述する。

平成28年度 :

加藤の不等式とCKN型不等式を中心に古典的不等式(重み付きハーディ不等式、重み付きソボレフ不等式等)の精密化の基礎的研究が精力的に行われた。特に、 $p$ ラプラシアンに対する測度値の加藤の不等式を証明した。それらを基礎とし、(1)  $p$ ラプラシアンを主要部とする準線型楕円型作用素に対する強最大値原理と逆最大値原理の研究および(2)  $p=1$ と臨界の場合のCKN型不等式の研究が行われた。さらに具体的には次の成果があった。(1)に関しては、適切に許容空間を設定することにより準線型楕円型作用素に対する強最大値原理と逆最大値原理の研究が成立し、準線型楕円型作用素に対する境界値問題の解の一意存在性、解の特異性が詳しく調べられた。また、我々が導入した許容空間とRenormalized 解とエントロピー解との関係が明らかになりつつある。(2)に関しては、 $p=1$ の場合のCKN型不等式が等周不等式であることに着目し、その証明と対称性の崩れの研究が行われた。

平成29年度 :

$p$ ラプラシアンを一般化した作用素( $A$ と呼ぶ)に対する加藤の不等式とCKN型不等式を中心に古典的不等式(重み付きハーディ不等式、重み付きソボレフ不等式等)の精密化の基礎的研究が精力的に行われた。特に、作用素 $A$ に対する測度値の加藤の不等式を証明した。それらを基礎と

し、(1)Aを主要部とする準線型楕円型作用素に対する強最大値原理と逆最大値原理の研究、(2)p-ラプラシアンに対する領域の境界まで込めた加藤の不等式の研究および(3)p=1と臨界の場合のCKN型不等式の研究が行われた。具体的には次の成果があった。(1)に関しては、適切に許容空間を設定することによりAを主要部とする準線型楕円型作用素に対する強最大値原理と逆最大値原理の研究が成立し、Aを主要部準線型楕円型作用素に対する境界値問題の解の一意存在性、解の特異性が詳しく調べられた。また、我々が導入した許容空間 Renormalized 解とエントロピー解との関係が明らかになりつつある。(2)については、線形の場合の先行結果の多くが準線形の場合にも成立する事が証明された。またpラプラス・キャパシティを導入し、従来のpキャパシティとハウスドルフ測度の関係が明らかにされた。(3)に関しては、p=1の場合のCKN型不等式が等周不等式であることに着目し、その証明と対称性の崩れの研究が引き続き行われた。

平成30年度：

一般化されたpラプラス作用素(Aと呼ぶ)に対するHardy型不等式、加藤の不等式とCKN型不等式を中心に古典的不等式(重み付きハーディ不等式、重み付きソボレフ不等式等)の精密化の基礎的研究が精力的に行われた。特に、作用素Aに対する測度値の加藤の不等式を証明した。それらを基礎とし、(1)Aを主要部とする準線型楕円型作用素に対する強最大値原理と逆最大値原理の研究、(2)pラプラシアンに対する領域の境界まで込めた加藤の不等式の研究、(3)p=1と臨界の場合のCKN型不等式の研究、および(4)1次元Hardy型不等式の研究が行われた。具体的には次の成果があった。(1)に関しては、適切に許容空間を設定することによりAを主要部とする準線型楕円型作用素に対する強最大値原理と逆最大値原理の研究が成立し、Aを主要部準線型楕円型作用素に対する境界値問題の解の一意存在性、解の特異性が詳しく調べられた。また、我々が導入した許容空間 Renormalized 解とエントロピー解との関係が明らかになりつつある。(2)については、線形の場合の先行結果の多くが準線形の場合にも成立する事が証明された。またpラプラス・キャパシティを導入し、従来のpキャパシティとハウスドルフ測度の関係が明らかにされた。(3)に関しては、p=1の場合のCKN型不等式が等周不等式であることに着目し、その証明と対称性の崩れの研究が引き続き行われた。(4)に関しては、境界からの距離のべきを重みとする弱Hardy型の不等式を導入し従来の不等式を精密化した。

令和元年度：

前年度に続き、一般化されたpラプラス作用素(Aと呼ぶ)に対するHardy型不等式、Sobolev不等式、加藤の不等式とCKN型不等式を中心に重み付き古典的不等式の精密化の基礎的研究が精力的に行われた。さらに補助事業期間の最終年度であるため、既に得られた研究成果の大部分を4篇の論文にまとめ出版した。具体的には以下の研究が行われた：(1)作用素Aに対する測度値の加藤の不等式の確立、Aを主要部とする準線型楕円型作用素に対する強最大値原理と逆最大値原理、(2)pラプラシアンに対する領域の境界まで込めた加藤の不等式、(3)p=1と臨界の場合のCKN型不等式の確立、(4)1次元Hardy型不等式の精密化とその応用。以下では主な結果を述べる：(1)に関しては、適切に許容空間を設定することによりAを主要部とする準線型楕円型作用素に対する強最大値原理と逆最大値原理の証明、Aを主要部とする準線型楕円型作用素に対する境界値問題の解の一意存在性と解の特異性が詳しく調べられた。また、我々が導入した許容空間とRenormalized 解とエントロピー解との関係が明らかにされた。(2)については、線形の場合の先行結果の多くが準線形の場合にも成立する事が証明された。(3)に関しては、p=1の場合のCKN型不等式が等周不等式であることに着目し、その証明と対称性の崩れの研究が引き続き行われた。(4)に関しては、すべてのべき型の重みに対してHardy不等式が1次元の片側境界条件の下で確立された。またその応用として、境界からの距離のべきを重みとする弱Hardy型の不等式を導入し従来の不等式を精密化した。さらに同時に古典不等式における精密なミッシング・タームの存在と応用の研究、臨界指数の不等式の精密化と関連する変分問題の研究等を行った。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計5件（うち査読付論文 5件/うち国際共著 4件/うちオープンアクセス 5件）

1. 著者名 Liu Xiaojing, Horiuchi Toshio	4. 巻 50
2. 論文標題 The equivalences among $p$ -capacity, Laplace-capacities and Hausdorff measure	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Mathematical Journal of Ibaraki University	6. 最初と最後の頁 5~13
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) <a href="https://doi.org/10.5036/mjiu.50.5">https://doi.org/10.5036/mjiu.50.5</a>	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている(また、その予定である)	国際共著 該当する
1. 著者名 Liu Xiaojing, Horiuchi Toshio	4. 巻 51
2. 論文標題 Kato's inequalities for admissible functions to quasilinear elliptic operators $A$	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Mathematical Journal of Ibaraki University	6. 最初と最後の頁 49~64
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) <a href="https://doi.org/10.5036/mjiu.51.49">https://doi.org/10.5036/mjiu.51.49</a>	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている(また、その予定である)	国際共著 該当する
1. 著者名 Chiba Naoki, Horiuchi Toshio	4. 巻 92
2. 論文標題 Radial symmetry and its breaking in the Caffarelli-Kohn-Nirenberg type inequalities for $p=1$	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Proceedings of the Japan Academy, Series A, Mathematical Sciences	6. 最初と最後の頁 51~55
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) <a href="https://doi.org/10.3792/pjaa.92.51">https://doi.org/10.3792/pjaa.92.51</a>	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている(また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 Liu Xiaojing, Horiuchi Toshio	4. 巻 48
2. 論文標題 Remarks on Kato's inequality when $p < u$ is a measure	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Mathematical journal of Ibaraki University	6. 最初と最後の頁 45~61
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) <a href="https://doi.org/10.5036/mjiu.48.45">https://doi.org/10.5036/mjiu.48.45</a>	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている(また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Liu Xiaojing, Horiuchi Toshio	4. 巻 46
2. 論文標題 Remarks on the strong maximum principle involving $\Delta$ -Laplacian	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Hiroshima Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 311 ~ 331
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) <a href="https://doi.org/10.32917/hmj/1487991624">https://doi.org/10.32917/hmj/1487991624</a>	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

[学会発表] 計9件 (うち招待講演 2件 / うち国際学会 7件)

1. 発表者名 Toshio Horiuchi
2. 発表標題 Improved Kato's inequalities for a quasilinear elliptic operator and relating topics
3. 学会等名 ICM 2018 (Rio De Janeiro, Brasil) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Xiaojing Liu
2. 発表標題 One dimensional Weighted Hardy's Inequalities and application
3. 学会等名 調和解析セミナー (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Hiroshi Ando
2. 発表標題 Weighted Hardy's inequalities with compact perturbations
3. 学会等名 調和解析セミナー (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Hiroshi Ando
2. 発表標題 Weighted Hardy's inequalities with compact perturbations
3. 学会等名 日本数学会 函数方程式論分科会 (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Xiaojing Liu, Toshio Horiuchi
2. 発表標題 The equivalences among $p$ - capacity, $p$ -Laplace-capacities and Hausdorff measure.
3. 学会等名 日本数学会、函数方程式分科会 (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 劉曉静、堀内利郎
2. 発表標題 Remarks on Kato's inequality when $\mu$ is a measure
3. 学会等名 日本数学会、函数方程式分科会 (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 劉曉静、堀内利郎
2. 発表標題 $p$ -ラプラシアンを含む精密化された加藤の不等式とその応用
3. 学会等名 日本数学会、函数方程式分科会 (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 堀内利郎
2. 発表標題 加藤の不等式とその周辺
3. 学会等名 「偏微分方程式および関連する諸問題」研究集会（国際学会）
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Toshio Horiuchi, Hiroshi Ando, Xiaojing Liu
2. 発表標題 One dimensional weighted Hardy's inequalities and application
3. 学会等名 日本数学会、函数方程式分科会（国際学会）
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究分担者	下村 勝孝  (SHIMOMURA KATSUNORI)  (00201559)	茨城大学・理工学研究科（理学野）・教授   (12101)	
研究分担者	中井 英一  (NAKAI EIICHI)  (60259900)	茨城大学・理工学研究科（理学野）・教授   (12101)	
研究分担者	安藤 広  (ANDOU HIROSHI)  (60292471)	茨城大学・理工学研究科（理学野）・准教授   (12101)	