

令和 3 年 6 月 24 日現在

機関番号：12401

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2016～2020

課題番号：16K05191

研究課題名(和文)非線形波動方程式の解の存在と非存在

研究課題名(英文)Existence or non-existence for the solutions of nonlinear wave equations

研究代表者

町原 秀二 (Machihara, Shuji)

埼玉大学・理工学研究科・教授

研究者番号：20346373

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,400,000円

研究成果の概要(和文)：Dirac-Klein-Gordon方程式、Thirringモデルの非線形Dirac方程式、Chern-Simons-Dirac方程式の初期値問題の適切性と非適切性に関する結果を得て、複数の論文を発表できた。特に空間一次元Dirac-Klein-Gordon方程式の湯川の相互作用項をもつタイプのものは1973年Chadam氏の最初の論文からの歴史のある問題で、それに対する最終決着を与えたものである。方程式の初期値問題の他に関数空間の不等式に対する研究を行った。ハーディの不等式、トレース定理、レリッヒの不等式に対する新しい知見を与えた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

偏微分方程式を研究対象としたときに解の存在定理がその重要性を持つことは明らかであろう。この研究期間中に行った研究主題は非線形分散型・双曲型偏微分方程式の初期値問題の適切性となる。つまり非線形項を含む形の偏微分方程式を考え、初期値から解を求めるといった初期値問題を取り扱った。そして適切性とは解の存在を含み、そこへ加えて解の一意性と初期値への連続依存性を要求した性質となる。これら三つの条件を満たすとき初期値問題は適切であるといい、一つでも欠如した場合は初期値問題は非適切であるという。問題が適切であるか非適切であるかは解を扱う関数空間の正則度に依存する。正則度による場合分けが完成すれば問題は終了する。

研究成果の概要(英文)：We have considered the time local well-posedness for the Cauchy problems of the Dirac-Klein-Gordon equations, generalized Thirring model of nonlinear Dirac equation, Chern-Simons-Dirac system and the dimension-reduced Chern-Simons-Dirac equations. Especially for the Dirac-Klein-Gordon equation with the Yukawa type nonlinearity, we have finished the classification of the regularities for which this problem is well-posed or ill-posed. We have also studied some kinds of inequalities, Hardy's inequality, Rellich inequality, and trace theorems.

研究分野：非線形分散型・双曲型偏微分方程式

キーワード：初期値問題適切性 初期値問題非適切性 ノルムインフレーション

1. 研究開始当初の背景

(1) 非線形波動方程式の解の存在と非存在について

非線形微分方程式の解の存在定理の研究は古くは Seagal の 1960 年代まで遡る。その時代は種々の形状の方程式に対し一般的枠組みで研究されていた。しかしその後、方程式は分類され各形状に特化した技術が開発されていく。今回取り扱った方程式(系)は分散型や双曲型と分類され、フーリエ解析を始めとする調和解析の技術を特に利用してきた。つまりこの範疇の微分方程式の研究の進展は調和解析の研究の進展と関連する。この範疇の方程式の特徴として解の正則度が初期値の正則度に遺伝するため正則度の低い問題設定がその難度を高める。解が所属する関数空間の正則度を表す指数の低減化は研究結果の進展を表す瞭然たる指標となった。1980 年代後半 Ginibre-Velo によるストリッカーズの制限評価の非線形偏微分方程式への応用、1990 年代 Bourgain または Klainerman-Machedon による制限ノルムの非線形項評価など技術革新があり現在に至る。

(2) 実解析的関数空間論について

実解析的関数空間に対する様々な不等式を取り扱う。1920 年に自身のノートに記した Hardy の不等式はその 32 年後 Hardy-Littlewood-Polya の本 *Inequalities* に載せられ出版された。その後、新しい関数空間の開発に沿うように Hardy の不等式は洗練化、そして複雑化していく。1999 年 Triebel などの決定的な結果もあるが、現在も興味深い未解決問題が数多く残る。応募者の共同研究は多次元 Hardy の不等式を Lorentz-Sobolev 空間で取り扱った。また豊込 Young の不等式や積評価なども同様な状況にある。

(3) 熱流方程式解の不等式新証明について

熱流方程式解の漸近挙動を利用して、これまでに知られている実解析の不等式に別証明を与える。Bennett-Bez は豊込 Young の不等式に対して、熱流方程式を用いた全く新しい証明を与えた。

2. 研究の目的

(1) 非線形波動方程式の解の存在と非存在について

非線形分散型・双曲型偏微分の初期値問題の適切性と非適切性を調べる。正則度によるクラス分けが最終目標。

(2) 実解析的関数空間論について

実解析的関数空間に対する様々な不等式の改良および新規発見を目標とする。また非線形波動方程式への応用を視野に入れることも目的の一つである。

(3) 熱流方程式解の不等式新証明について

別証明を与えるだけでなく、そこから見出せる不等式の本質的意義を探る。

3 . 研究の方法

(1) 非線形波動方程式の解の存在と非存在について

微分方程式初期値問題の適切性・非適切性に対してこれまでの既存の手法を試す。特に非適切性の証明には Bejenaru-Tao, Kishimoto や Ogawa-Iwabuchi の手法を試す。

(2) 実解析的関数空間論について

(3) 熱流方程式解の不等式新証明について

既存の論文の精査から始める。

4 . 研究成果

非線形分散型・双曲型偏微分の初期値問題の適切性と非適切性に関する論文を研究期間中に以下の論文を出版することができた。

Huh, Hyungjin and Shuji Machihara and Mamoru Okamoto, Well-posedness and ill-posedness of the Cauchy problem for the generalized Thirring mode, *Differential and Integral Equations*, 29, (2016), 401-420.

Shuji Machihara and Mamoru Okamoto, Sharp well-posedness and ill-posedness for the Chern-Simons-Dirac system in one dimension, *International Mathematics Research Notices*. IMRN, 6, (2016), 1640-1694.

Shuji Machihara and Mamoru Okamoto, Remarks on ill-posedness for the Dirac-Klein-Gordon system, *Dynamics of Partial Differential Equations*, 13,(2016), 179-190.

Machihara, Shuji and Ogawa, Takayoshi, Global wellposedness for a one-dimensional Chern-Simons-Dirac system in L^p , *Comm. Partial Differential Equations*, 42, (2017), 1175-1198.

Machihara, Shuji and Okamoto, Mamoru, Well-posedness for the dimension-reduced Chern-Simons-Dirac system, *J. Evol. Equ.*, 17, (2017), 1031-1048.

関数空間不等式に関する以下の論文を出版できた。

Machihara, Shuji and Ozawa, Tohru and Wadade, Hidemitsu, Remarks on the Rellich inequality, *Math. Z.*, 286, (2017), 1367-1373.

熱流方程式解の不等式新証明に関する以下の論文を出版することができた。

Neal Bez and Shuji Machihara and Mitsuru Sugimoto, Extremisers for the trace theorem on the sphere, *Mathematical Research Letters*, 23, (2016), 633-647.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計7件（うち査読付論文 6件 / うち国際共著 1件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Machihara, Shuji and Okamoto, Mamoru	4. 巻 17
2. 論文標題 Well-posedness for the dimension-reduced Chern-Simons-Dirac system	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 J. Evol. Equ.	6. 最初と最後の頁 1031--1048
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00028-016-0371-1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Machihara, Shuji and Ogawa, Takayoshi	4. 巻 42
2. 論文標題 Global wellposedness for a one-dimensional Chern-Simons-Dirac system in L^p	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Comm. Partial Differential Equations	6. 最初と最後の頁 1175--1198
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1080/03605302.2017.1330339	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Machihara, Shuji and Ozawa, Tohru and Wadade, Hidemitsu	4. 巻 286
2. 論文標題 Remarks on the Rellich inequality	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Math. Z.	6. 最初と最後の頁 1367--1373
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00209-016-1805-8	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Shuji Machihara and Mamoru Okamoto	4. 巻 13
2. 論文標題 Remarks on ill-posedness for the Dirac-Klein-Gordon system	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Dynamics of Partial Differential Equations	6. 最初と最後の頁 179--190
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4310/DPDE.2016.v13.n3.a1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Shuji Machihara and Mamoru Okamoto	4. 巻 6
2. 論文標題 Sharp well-posedness and ill-posedness for the Chern-Simons-Dirac system in one dimension	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 International Mathematics Research Notices. IMRN	6. 最初と最後の頁 1640--1694
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1093/imrn/rnv160	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Huh, Hyungjin and Shuji Machihara and Mamoru Okamoto	4. 巻 29
2. 論文標題 Well-posedness and ill-posedness of the Cauchy problem for the generalized Thirring model	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Differential and Integral Equations	6. 最初と最後の頁 401--420
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Neal Bez and Shuji Machihara and Mitsuru Sugimoto	4. 巻 23
2. 論文標題 Extremisers for the trace theorem on the sphere	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Mathematical Research Letters	6. 最初と最後の頁 633--647
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4310/MRL.2016.v23.n3.a3	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計9件 (うち招待講演 6件 / うち国際学会 2件)

1. 発表者名 Machihara Shuji
2. 発表標題 Spherical Harmonics and Hardy's equality
3. 学会等名 Recent Progress on Dispersive and Wave Equations
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 町原 秀二
2. 発表標題 The range of Sobolev regularity for the well-posedness of the Dirac-Klein-Gordon system in 1d
3. 学会等名 Workshop on nonlinear wave equations and related topics in Kobe (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 町原 秀二
2. 発表標題 非線形シュレディンガー方程式の有限時間爆発解に対する注意
3. 学会等名 反応拡散方程式と非線形分散型方程式の解の挙動 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 町原 秀二
2. 発表標題 The range of Sobolev regularity for the well-posedness of the Dirac-Klein-Gordon system in 1d
3. 学会等名 第11回名古屋微分方程式研究集会 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Shuji Machihara
2. 発表標題 Global well-posedness for one dimensional Chern-Simons-Dirac system in L^p
3. 学会等名 Nonlinear PDE for Future Applications -Hyperbolic and Dispersive PDE- (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 町原 秀二
2. 発表標題 空間1次元Dirac-Klein-Gordon方程式の初期値問題の適切性について
3. 学会等名 日本数学会実函数論分科会, 函数解析学分科会共催 第56回実函数論・函数解析学合同シンポジウム(招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Shuji Machihara
2. 発表標題 Remarks on the ill-posedness for the Dirac-Klein-Gordon system
3. 学会等名 International Workshop on ``Fundamental Problems in Mathematical and Theoretical Physics'' (招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Shuji Machihara
2. 発表標題 Ill-posedness results for the 1d Dirac-Klein-Gordon system
3. 学会等名 Interactions Between Harmonic and Geometric Analysis
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 町原 秀二
2. 発表標題 空間1次元 Dirac-Klein-Gordon 方程式初期値問題の非適切性の議論
3. 学会等名 第 10 回 実解析と函数解析による偏微分方程式論 研究集会
4. 発表年 2016年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------