

令和 2 年 6 月 16 日現在

機関番号：12608

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2016～2019

課題番号：16K05193

研究課題名(和文) 複素力学系のGoldberg-Milnor予想と退化Beltrami方程式

研究課題名(英文) Goldberg-Milnor conjecture and degenerate Beltrami equations in complex dynamics

研究代表者

川平 友規 (Kawahira, Tomoki)

東京工業大学・理学院・准教授

研究者番号：50377975

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,600,000円

研究成果の概要(和文)：複素力学系の「放物的分岐」とは、複数の周期点が退化した状態である「放物的周期点」が、力学系を定める写像の摂動によって複数の周期点に分岐し、力学系の性質が変化する現象をいう。「放物的分岐」は力学系の構造安定性を阻害する典型的な要因であるが、1990年代、GoldbergとMilnorは摂動の方向を適切に選べば、放物的分岐がコントロールでき、力学系を安定に保ったまま変形できるであろうと予想した。本研究では、この予想の正否を「退化Beltrami方程式」とよばれる、複素構造の変形を記述するPDEの同相解の存在に帰着させる、というアプローチにより、既存の結果とほぼ同等の結果が得られることを示した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

複素力学系とは複素数でパラメータ付けされる空間において、時間発展するシステムである。そのような力学系はほとんどの場合安定であることが期待されるが、研究としてはむしろ、力学系を「不安定」にする要因を特定する過程が面白い。本研究では、そのような不安定性要因として代表的なものである「放物的分岐」という現象をコントロールする方法として、新たに解析的なアプローチを提案した。

研究成果の概要(英文)：In complex dynamics, the periodic points with multiplicity are called parabolic periodic points. If one perturb the mapping that generates the dynamical system, parabolic cycles bifurcates and the dynamics exhibits drastic change. In 1990s, Goldberg and Milnor conjectured that one can choose an appropriate direction of the perturbation in such a way that the dynamics changes quite tamely. In this research program, I take an analytic approach to this conjecture by using degenerate Beltrami equations, and obtained an alternative way to prove some known results about this conjecture.

研究分野：複素力学系

キーワード：複素力学系 ジュリア集合 構造安定性 放物的分岐 Beltrami方程式 擬等角写像

1. 研究開始当初の背景

複素係数の有理式が定める Riemann 球面上の有理関数 f に対し、その反復合成によって得られる力学系を f による (1 次元有理) 複素力学系とよぶ。これを時間発展する動的システムとみなすとき、関数 f は点の軌道を定める、いわば「運動法則」である。では、この「運動法則」を微小変化させた場合、系全体はどの程度変化するのだろうか？これが本研究の根底にある、力学系の「安定性」の問題である。

安定性と変形可能性。与えられた力学系が構造安定であるとは、力学系を生成する有理関数の係数を任意の方向に微小変化させたとき (これを関数の摂動という)、力学系の性質が位相的に変化しないことをいう。 f に十分近い有理関数の力学系は、ある適当な同相写像のレンズを通して f の力学系を観測したものであり、「力学系の位相的変形」になっているのである。このように「力学系の安定性」と「力学系の変形可能性」は密接に関連している。とくに Mane, Sad, Sullivan らが 1980 年代初頭に構築した複素力学系の擬等角変形の理論によれば、安定性に関する諸問題は Teichmüller 理論をはじめとする複素構造の変形理論によって記述されるのである。

力学系の放物的分岐。同じく 1980 年頃、Douady と Hubbard は多項式力学系に付随する外射線とよばれる曲線族の組み合わせ論的構造に着目し、2 次多項式からなる力学系族の退化と分岐を詳細に調べた。「外射線の理論」はとくにパラメーター空間 (係数空間) の研究に有効で、いわゆる Mandelbrot 集合の境界 (境界は「構造安定でない 2 次多項式」の集合に相当する) がもつ複雑なフラクタル構造も、やはり組み合わせ論的な情報で記述できることを示した。『複素力学系の Goldberg-Milnor 予想』は以上のような背景のもとで生まれる。Goldberg と Milnor は 1993 年の論文において、Douady-Hubbard の外射線の理論を発展させるが、その際に着目したのが「周期点の退化と分岐」であった。とくに放物的周期点とよばれるタイプの周期点は、複数の周期点が退化した状態であり、 f を摂動させれば (すなわち多項式 f の係数を微小変化させれば)、退化していた周期点は複数の周期点に分岐する。力学系を同相写像で眺めてもそのような分岐は決して見えないので、放物的周期点をもつ多項式 f は多項式関数族において構造安定ではありえない。このように放物的周期点が摂動により分岐し力学系が質的に変化する現象を力学系の放物的分岐とよぶ。

GM 予想。Goldberg と Milnor は外射線の組み合わせ論的な考察から、「放物的周期点をもつ多項式 f は安定な力学系の族が別の安定な力学系の族に移行する過程で生じるものであろう」と予測し、次の予想を立てた：『放物的周期点をもつ多項式 f に対し、以下を満たす「特定方向の」摂動 g が必ず存在する： f の放物的周期点は g の安定な吸引的周期点と反発的周期点のペアに分岐するが、 g の力学系をカオス部分 (Julia 集合) に制限したものは f のその位相的変形になっている。』一般に「吸引的周期点」をもつ力学系は非自明かつ安定な複素構造の変形ができるので、このような摂動 g が存在するとき、 f はある力学系の変形族の境界に属することがわかる。さらに、放物的周期点をもつ多項式 f は「弱い意味での構造安定性」を持つことを示しており、 g の属する力学系の変形族が穏やかに退化したものと結論できる。このように、摂動の方向により放物的分岐を制御することで、パラメーター空間内で力学系の安定な変形族がどのように配置されているかについて本質的な情報を得ることができるのである。

Goldberg と Milnor は「多項式」の力学系に対してこの予想を立てたが、まったく同じ文で「有理関数」が生成する力学系についての予想を述べることができる。本研究が解決を目指した

のは、この一般化された『Goldberg-Milnor 予想』(以下『GM 予想』)である。

2. 研究の目的

Goldberg と Milnor は多項式特有の組み合わせ論的な考察に基づいて『GM 予想』を立てたが、当時はまだ 2 次多項式族のような比較的単純な例でしか成立が確かめられておらず、根拠に乏しいものであった。しかも有理関数に対してはそのような組み合わせ論的な議論が適用できない。研究代表者は問題の解析的側面に着目し、予想の正否を退化 Beltrami 方程式と呼ばれる偏微分方程式の解の存在にまで帰着させた。本研究の目的は、力学系不変な退化 Beltrami 方程式の解法を追求し、『Goldberg-Milnor 予想』の肯定的解決を目指すことである。

Beltrami 方程式とは等角構造 (= 複素構造) の変形度をあらかじめ指定したとき、それを実現する同相写像が満たすべき方程式である。たとえば擬等角写像はその解として典型的であり、理論的にも十分に整備されているため、複素力学系の研究では欠かすことができない道具となっている。一方、退化 Beltrami 方程式とは「擬等角写像が解とならない Beltrami 方程式」のことであり、一般には解の存在すら保証されない。複素力学系への応用も数えるほどしかなく、しかも「退化の度合い」が十分に小さいものに限られていた。本研究で扱う退化 Beltrami 方程式は「退化の度合い」が格段に大きく、既存の結果では歯がたたない。その代わり、変形度が力学系不変な形で指定されているため、特殊な解法が存在すると期待される。本研究が成功を収めれば、近年やや手詰まり感のある複素力学系理論に目新しい道具を提供することになる。さらには、関連分野である擬等角写像論、Klein 群論、Teichmüller 理論への応用も期待される。

3. 研究の方法

本研究課題は、『GM 予想』の成否を「力学系不変な退化 Beltrami 方程式」を解くことに帰着させ、その肯定的解決を目指した。具体的には、『GM 予想』の解決に向けた新しいアプローチとして、(ア): 放物的周期点をもつ有理写像の力学系に対し、『GM 予想』が存在を主張するような摂動を位相力学系として実現し (イ): それを複素力学系とみなすために必要な複素構造の変形を、退化 Beltrami 方程式を解くことで実現する、という方法をとった。Beltrami 方程式とは、ほとんどいたるところで絶対値 1 未満の値をとる複素平面上の可測関数 μ に対し、 μ が定める「複素構造の変形」を実現する同相写像が満たす方程式である。 μ は Beltrami 係数と呼ばれ、の絶対値の本質的上限 (すなわち、測度 0 の集合を除いた上限) が真に 1 未満のとき、Beltrami 方程式は中への向きを保つ同相写像を (適切な正規化のもとで) 一意な解として持ち、いわゆる擬等角写像となる。擬等角写像の理論は 1960 年代から Ahlfors と Bers によって解析的に使いやすい形に整備され、Teichmüller 理論、Klein 群論の発展に本質的な寄与をした。複素力学系理論においても、その著しい応用の数々は枚挙に暇がない。現在でも擬等角写像の理論は複素力学系研究でもっとも基本的な道具であり、その応用に特化した書籍も複数あるほどである。

一方、Beltrami 係数の本質的上限が 1 となる Beltrami 方程式を「退化」Beltrami 方程式とよぶ。たとえば単位円板から複素平面への上への滑らかな同相写像は、退化 Beltrami 方程式を満たす。単位円板と複素平面は解析的に異なる「型」(双曲型と放物型)を持つ Riemann 面だが、退化 Beltrami 方程式の解は「型を変える」ことができ、「型を変えない」擬等角写像と比べて変

形の自由度が格段に高いのが特徴である。しかし、与えられた Beltrami 係数 μ に対し、退化 Beltrami 方程式の可解性についての一般論は確立されていない。そのような困難もあり、複素力学系への応用例はまだ少ない。すなわち、退化 Beltrami 方程式の基礎理論からアプローチしていく必要があった。

4. 研究成果

- ・退化 Beltrami 方程式の解法を見直すにあたって、ベースとなる（退化していない）Beltrami 方程式の種々の解法について総括する勉強会を 2017 年の 9 月と 2019 年の 3 月に行った。

- ・研究代表者個人の研究により、幾何学的有限とよばれるクラスの多項式については、そのような退化ベルトラミ方程式の解が構成できることがわかった（未発表）。しかし、そのようなクラスの多項式についてはすでに『GM 予想』が成立することがわかっており、その意味で予想自体を前進させることはできなかったことになる。一方で、このアプローチにおける問題点はある程度わかったので、今後の研究方針が明確になったことは大きな収穫であった。

- ・島内宏和氏（八戸工大、当時は山梨英和大学）と共同で、サークルパッキングと Colin de Verdiere の変分原理を応用した Beltrami 方程式の解の存在定理の証明と、線形系を用いた Beltrami 方程式の近似解法の研究をおこなった。

- ・Yi-Chiuan Chen 氏（中央研究院、台湾）と共同で、力学系の正則運動（各点の動きが正則関数になっているような擬等角変形）の退化の速度評価を行い、関連する論文 2 本を発表した。

- ・木坂正史氏（京都大学）と共同で、Mandelbrot 集合の境界に、「ほとんどすべての形の」Julia 集合のコピーが、「ほとんど等角な擬等角写像による埋め込み」として、稠密に存在していることを証明した。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計4件（うち査読付論文 4件/うち国際共著 2件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Yi-Chiuan Chen and Tomoki Kawahira	4. 巻 473
2. 論文標題 Simple proofs for the derivative estimates of the holomorphic motion near two boundary points of the Mandelbrot set	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of Mathematical Analysis and Applications	6. 最初と最後の頁 345-356
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2018.12.052	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Yi-Chiuan Chen and Tomoki Kawahira	4. 巻 372
2. 論文標題 From Cantor to Semi-hyperbolic Parameter along External Rays	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Transactions of the American Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 7959-7992
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) https://doi.org/10.1090/tran/7839	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Tomoki Kawahira	4. 巻 27
2. 論文標題 The Riemann hypothesis and holomorphic index in complex dynamics	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Experimental Mathematics	6. 最初と最後の頁 37-46
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) https://doi.org/10.1080/10586458.2016.1217443	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Tomoki Kawahira	4. 巻 10
2. 論文標題 Zalcman functions and similarity between the Mandelbrot set, Julia sets, and the tricorn	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Analysis and Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 16
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) https://doi.org/10.1007/s13324-020-00357-4	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

[学会発表] 計14件(うち招待講演 12件/うち国際学会 11件)

1. 発表者名 Tomoki Kawahira
2. 発表標題 Riemann hypothesis and complex dynamics.
3. 学会等名 Value distribution of zeta and L-functions and related topics (招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Tomoki Kawahira
2. 発表標題 Almost affine copies of the Julia sets in the Mandelbrot set
3. 学会等名 RIMS研究集会「複素力学系研究とその発展」(招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Tomoki Kawahira
2. 発表標題 Almost affine copies of the Julia sets in the Mandelbrot set
3. 学会等名 The Boston-Keio Workshop 2018 (招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Tomoki Kawahira
2. 発表標題 On dynamical and parametric Zalcman functions
3. 学会等名 Perspectives in Modern Analysis International Conference in honor of Dov Aharonov, Samuel Krushkal, Simeon Reich, and Lawrence Zalcman (招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Tomoki Kawahira
2. 発表標題 Almost conformal copies of the Julia sets in the Mandelbrot set
3. 学会等名 NTCS Workshop on Dynamical Systems 2017 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Tomoki Kawahira
2. 発表標題 On Dynamical and Parametric Zalcman Functions
3. 学会等名 CMTF 2017 (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Tomoki Kawahira
2. 発表標題 The Riemann hypothesis and holomorphic index in complex dynamics
3. 学会等名 Residues, Dynamics and Hyperfunctions (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Tomoki Kawahira
2. 発表標題 Almost conformal copies of the Julia sets in the Mandelbrot set
3. 学会等名 2017年度日本数学会秋季総合分科会・函数論分科会
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Tomoki Kawahira
2. 発表標題 On Dynamical and Parametric Zalcman Functions
3. 学会等名 RIMS Workshop on Complex Dynamics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Tomoki Kawahira
2. 発表標題 From Cantor to Misiurewicz along parameter ray
3. 学会等名 2016 NCTS Workshop on Dynamical Systems and 2016 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Tomoki Kawahira
2. 発表標題 Similarity between the Mandelbrot set and the Julia sets
3. 学会等名 The 3rd UU-TT Symposium (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Tomoki Kawahira
2. 発表標題 The Riemann hypothesis and holomorphic index in complex dynamics
3. 学会等名 函数論シンポジウム (招待講演)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Tomoki Kawahira
2. 発表標題 On the derivatives of degenerating holomorphic motions of hyperbolic quadratic Julia sets
3. 学会等名 複素力学系およびそのモジュライ等の関連分野の研究（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Tomoki Kawahira
2. 発表標題 On dynamical and parametric Zalcman functions
3. 学会等名 平成28年度等角写像論・値分布論研究集会（招待講演）
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計1件

1. 著者名 川平友規	4. 発行年 2019年
2. 出版社 裳華房	5. 総ページ数 233
3. 書名 入門複素関数	

〔産業財産権〕

〔その他〕

<p>研究者webページ http://www.math.titech.ac.jp/~kawahira Beltrami方程式勉強会のページ https://sites.google.com/view/morreybojarskiahlforsbers https://sites.google.com/view/beltrami-part-ii</p>

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----