

令和 2 年 6 月 2 日現在

機関番号：14401

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2016～2019

課題番号：16K05201

研究課題名(和文) 多重線形調和解析における特異性の研究

研究課題名(英文) Multilinear harmonic analysis and the singularity

研究代表者

富田 直人 (Tomita, Naohito)

大阪大学・理学研究科・准教授

研究者番号：10437337

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,400,000円

研究成果の概要(和文)：調和解析(実解析)の分野では、2000年頃から線形の理論を多重線形の理論へと拡張する話題がメインテーマの1つとして研究され、現在ではこの種的话题を多重線形調和解析と呼ぶことが多い。多重線形調和解析は、単なる線形の理論の一般化などではなく、調和解析の問題としてもチャレンジングであるし、また応用面から眺めても偏微分方程式論の発展の可能性を秘めている。本研究では、双線形ヒルベルト変換に代表される強い特異性を持つ作用素にどのようにアプローチすべきかを考察した。また、双線形擬微分作用素に関する興味深い結果を得ることに成功した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

宮地晶彦氏(東京女子大学)との双線形擬微分作用素に関する研究は、V. Naibo氏とA. Thomsom氏のJ. Math. Anal. Appl. (2019)の論文の中で、基本的な枠組みにおける有界性問題を終わらせたと紹介されており、価値あるものと信じている。また、L. Grafakos氏、宮地晶彦氏との多重線形フーリエ乗法作用素の共同研究では、有界性を保証するためのマルチプライヤーに課すべき最適な正則性条件を決定することに成功した。

研究成果の概要(英文)：In the field of harmonic analysis, the research to extend the theory for linear operators to the one for multilinear operators has been actively studied since around 2000. Nowadays this topic is often called multilinear harmonic analysis. Multilinear harmonic analysis is not just a generalization of linear theory, it is also a challenging problem for harmonic analysis, and it has the potential for the development of the study of partial differential equations from an application perspective. I studied how to approach operators with strong singularity such as bilinear Hilbert transform. I also obtained the results on the boundedness of bilinear pseudo-differential operators.

研究分野：実解析学

キーワード：多重線形作用素 擬微分作用素 フーリエ乗法作用素

1. 研究開始当初の背景

調和解析(実解析, もしくはフーリエ解析とも言う)の分野では, 2000 年頃から線形の理論を多重線形の理論へと拡張する話題がメインテーマの 1 つとして活発に研究され, 現在ではこの種の問題を多重線形調和解析と呼ぶことが多い. 多重線形調和解析は, 単なる線形の理論の一般化などではなく, 調和解析の問題として眺めても非常にチャレンジングであるし, また応用面から眺めても偏微分方程式論の発展の可能性を大いに秘めている.

この 20 年ほどの多くの研究者の努力により, 多重線形調和解析の基本的な理論は構築された. しかし, 双線形 Hilbert 変換をはじめとする特異性の強い多重線形作用素に対する有界性はいまだ未解決な部分が残っている. 特異性の強い多重線形作用素の難しさは, Littlewood-Paley 理論だけでは不十分で, さらに議論が必要となる点である. 本研究において, この特異性の強さに対し, どのようにアプローチすべきかを研究しようと思った.

2. 研究の目的

大きな目標としては, Calderon の予想に由来する双線形 Hilbert 変換に関する未解決問題に対し, 解決への糸口を見つけることであった. 多重線形作用素の中でも, 際立って, 双線形 Hilbert 変換の取り扱いが難しい理由は, その対応するシンボルの特異性の強さが起因している. 現状の行き詰まりを打破するため, 本研究では, この特異性の強さに対抗するため, 特異性以外の点で何らかの良い状況を設定し, その良い状況を作り出している付加条件をどれだけ弱めることができるのかという立場で, 問題を提議し考察していくことを目標とした. また, 多重線形理論の偏微分方程式への応用を模索することも目標であった.

3. 研究の方法

双線形 Hilbert 変換の有界性に関する未解決部分に対し, まずは関数空間からのアプローチを考えた. 具体的には, Lebesgue 空間を Besov 空間や Triebel-Lizorkin 空間に置きかえ, より有界性が成り立ちやすい状況を設定した上で, 有界性を導くのである. これらの関数空間は Littlewood-Paley 分解を用いて定義され, この分解は本研究のこれまでの多重線形理論の研究における基本的な道具であったため, 関数空間を用いる利点を見出せるものと考えた. 多重線形作用素の Besov 空間や Triebel-Lizorkin 空間などの関数空間上での有界性問題は非常に基本的でありながら, あまり研究が進んでいない. その理由は, Besov 空間や Triebel-Lizorkin 空間を定義する際に用いられるフーリエ乗法作用素と, 多重線形作用素が可換にならないことが起因しているためである. よって, この可換性の欠如をどのように克服するかが問題であり, 一般的な作用素を扱うのではなく, まずはフーリエ乗法作用素, 擬微分作用素という基本的な作用素の関数空間上での有界性から研究を開始することにした.

4. 研究成果

2016 年度は, 1,1 型と呼ばれる双線形擬微分作用素の有界性を研究した. 1,1 型とは, 空間変数に対して 1 回微分した時に, 擬微分作用素のオーダーが 1 つ上がるシンボルを持つ作用素である. 線形の場合でも, このタイプの擬微分作用素は一般には L^2 有界性が成り立たないことが知られており, 特殊なものである. 先行研究では, 双線形擬微分作用素の有界性が Besov 空間, Triebel-Lizorkin 空間において議論されていたが, これらの関数空間のパラメーターを Sobolev 空間となるように選んだ場合には, 既存の結果よりも悪くなってしまうという問題点があった. これに対し, Sobolev 空間の場合から期待される自然な条件の下, Besov 空間, Triebel-Lizorkin 空間での 1,1 型の双線形擬微分作用素の有界性を得ることに成功した.

2017 年度は, 宮地晶彦氏(東京女子大学)と共に, 双線形擬微分作用素の有界性の研究を進展させることが出来た. 具体的には, exotic class と呼ばれる取り扱いの難しいクラスにシンボルを持つ双線形擬微分作用素に対して, これまでは極めて特別な場合にしか有界性を得ることが出来ていなかったが, 一般的な場合での結果を得ることに成功した. これまでの Littlewood-Paley 分解のみに頼ったシンボルの分解ではうまく行かなかった点に対し, 今回は, まずシンボルに対し Littlewood-Paley 分解を行い, そして得られた 1 つ 1 つのピースをさらに適切なサイズの立方体で分解する新たな手法が問題解決への鍵となった. また, 加藤睦也氏(群馬大学)と共に, $\dot{B}^s_{p,q}$ -モジュレーション空間上での(線形)擬微分作用素の有界性に関する研究を行った. ここで, $\dot{B}^s_{p,q}$ -モジュレーション空間とは, パラメーター s を導入することにより, モジュレーション空間とベゾフ空間を統一的に扱える関数空間である. 我々の得た結果は, $s=0$ の場合に知られていたモジュレーション空間上での有界性定理を一般化したものと眺めることもでき, さらに擬微分作用素論における基本定理である Calderon-Vaillancourt の定理も含んでいる. そして,

我々の結果は、 \mathcal{S} -モジュレーション空間が exotic class にシンボルを持つ擬微分作用素の有界性を議論するのに非常に適した空間であることを示唆するものとなっている。

2018年度は、加藤睦也氏(群馬大学)と宮地晶彦氏(東京女子大学)と共に、 $\mathcal{S}_{\{0,0\}}$ 型の多重線形擬微分作用素の研究を行った。次の3点が我々の研究のセールスポイントである。(1) 多重線形擬微分作用素の有界性を保証するためにシンボルが満たすべき減衰条件を、一般的な重み関数を用いて表現し、我々の得られた結果はこれまでに知られていたものの改良になっており、ある意味で最適なものである。(2) 擬微分作用素の有界性を保証するためのシンボルの正則性について明らかにすることができた。(3) これまではルベーク空間の枠組みで有界性が議論されてきたが、 $\mathcal{S}_{\{0,0\}}$ 型の多重線形作用素はアマルガム空間と呼ばれる関数空間と非常に相性がよく、アマルガム空間の枠組みで議論することにより、従来の有界性を改良することができた。

2019年度は、宮地晶彦氏(東京女子大学)と共に、双線形フーリエマルチプレイヤー作用素の有界性に関する研究を行った。ルベーク空間の枠組みでは、これまで、双線形作用素の有界性を保証するためのマルチプレイヤーに課すべき正則性条件を弱める研究をしてきた。今回のテーマは、この弱い正則性条件下で、双線形作用素の定義域や値域として現れる関数空間を、ルベーク空間からハーディー空間や BMO 空間に置き換えることが可能かどうかであった。特別な場合ではあるが、いくつかの結果を得ることができた。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計7件（うち査読付論文 7件/うち国際共著 1件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 T. Kato, M. Sugimoto, N. Tomita	4. 巻 278
2. 論文標題 Nonlinear operations on a class of modulation spaces	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Functional Analysis	6. 最初と最後の頁 印刷中
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jfa.2019.108447	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 A. Miyachi, N. Tomita	4. 巻 10
2. 論文標題 Bilinear pseudo-differential operators with exotic symbols, II	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of Pseudo-Differential Operators and Applications	6. 最初と最後の頁 397-413
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s11868-018-0251-2	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 T. Kato, N. Tomita	4. 巻 188
2. 論文標題 Pseudodifferential operators with symbols in the Hormander class $S^0_{\{\alpha, \alpha\}}$ on α -modulation spaces	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Monatshefte für Mathematik	6. 最初と最後の頁 667-687
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00605-019-01264-y	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 T. Kato, N. Tomita	4. 巻 292
2. 論文標題 A remark on the Schrodinger propagator on Wiener amalgam spaces	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Mathematische Nachrichten	6. 最初と最後の頁 350-357
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1002/mana.201700445	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 M. Fujita, N. Tomita	4. 巻 146
2. 論文標題 Weighted norm inequalities for multilinear Fourier multipliers with critical Besov regularity	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Proceedings of the American Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 555-569
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1090/proc/13680	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 K. Koezuka, N. Tomita	4. 巻 24
2. 論文標題 Bilinear pseudo-differential operators with symbols in $BS^m_{\{1,1\}}$ on Triebel-Lizorkin spaces	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Journal of Fourier Analysis and Applications	6. 最初と最後の頁 309-319
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00041-016-9518-2	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 L. Grafakos, A. Miyachi, H.V. Nguyen, N. Tomita	4. 巻 69
2. 論文標題 Multilinear Fourier multipliers with minimal Sobolev regularity	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Journal of the Mathematical Society of Japan	6. 最初と最後の頁 529-562
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2969/jmsj/06920529	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計10件 (うち招待講演 10件 / うち国際学会 8件)

1. 発表者名 富田 直人
2. 発表標題 $S_{\{0,0\}}$ 型の双線形擬微分作用素について
3. 学会等名 信州大学偏微分方程式研究集会 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 N. Tomita
2. 発表標題 Bilinear pseudo-differential operators with exotic symbols
3. 学会等名 12th International ISAAC Congress (Portugal) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 N. Tomita
2. 発表標題 On the boundedness of bilinear pseudo-differential operators of $S_{\{0,0\}}$ -type
3. 学会等名 2019 Taiwan Mathematical Society Annual Meeting (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 N. Tomita
2. 発表標題 On the $L^2 \times L^2 \rightarrow L^r$ boundedness of bilinear pseudo-differential operators of $S_{\{0,0\}}$ -type
3. 学会等名 NCTS Workshop on Harmonic Analysis (Taiwan) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 富田直人
2. 発表標題 双線形擬微分作用素とその応用
3. 学会等名 非線形波動及び分散型方程式の研究 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 N. Tomita
2. 発表標題 Bilinear pseudo-differential operators with exotic symbols
3. 学会等名 International Conference on Harmonic Analysis and its Applications (China) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 N. Tomita
2. 発表標題 Bilinear pseudodifferential operators of type 1,1 and their application to the Kato-Ponce inequality
3. 学会等名 5nd East Asian Conference in Harmonic Analysis and Applications (China) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 N. Tomita
2. 発表標題 Bilinear pseudodifferential operators of type 1,1 and their application to the Kato-Ponce inequality
3. 学会等名 Harmonic Analysis and its Applications in Tokyo 2017 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 N. Tomita
2. 発表標題 On the boundedness of multilinear Fourier multiplier operators
3. 学会等名 調和解析と非線形偏微分方程式 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 N. Tomita
2. 発表標題 Weighted norm inequalities for multilinear Fourier multipliers with critical Besov regularity
3. 学会等名 International Workshop on Harmonic Analysis and its Applications in Beijing 2016 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----