2版

様　式　C－１９、F－１９－１、Z－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　５ 年　 ６ 月　 ５ 日現在

機関番号：３２７０８

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2016～2022

課題番号：１６K０５２１３

研究課題名（和文）1次元及び高次元複素力学系における implosion の理論とその応用

研究課題名（英文）Theory of implosion in complex dynamics in dimensions one and higher and its applications

研究代表者

中根　静男（Nakane, Shizuo）

東京工芸大学・工学部・名誉教授

研究者番号：５０１７２３５９

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,700,000円

研究成果の概要（和文）：写像の反復によって得られる軌道の振る舞いは、写像を変形することにより急激に変化することがある。特に、写像の不動点が二つに分岐するとき、parabolic implosion という不連続な現象が現れるが、これと類似の現象が2次元の skew product 写像の二つのサドル不動点をつなぐ軌道が存在するときにも生じる。
サドル不動点で写像を線形化することにより、その点の近傍での軌道を制御する。写像の高次の反復の列が一様収束することを示すことで、fiber Julia 集合の挙動を解明した。fiber Julia 集合が fiber Julia-Lavaurs 集合に収束することも示された。

研究成果の学術的意義や社会的意義
① 2つのサドル不動点をつなぐ軌道（ヘテロクリニック軌道）が存在するときに、fiber Julia 集合が不連続に振る舞うという、parabolic implosion と類似の現象を数値実験で見出した。
② 軌道の振る舞いから類推して、写像の反復列が Lavaurs 写像に収束するという parabolic implosion と同様の構造が存在することを示し、fiber Julia 集合の不連続性を証明した。
③ 力学系の分岐現象は物理学における相転移現象に対応するものであるので、本研究の物理学等への寄与が期待される。

研究成果の概要（英文）： The behavior of the orbits obtained by iteration of maps can change drastically as the mappings are perturbed. In particular, discontinuous phenomenon called parabolic implosion appears when a fixed point of mappings bifurcates into two fixed points. An analogous phenomenon occurs when a skew product map in dimension two has an orbit connecting two saddle fixed points.
By linearizing the maps at saddle fixed points, we can control the orbits in a neighborhoods of the saddle fixed points. Then, by showing the local uniform convergence of the sequence of high iterates of the maps, we have clarifed the behavior of fiber Julia sets. We have also shown that fiber Julia sets converge to the fiber Julia-Lavaurs set.

研究分野：複素力学系

キーワード：parabolic implosion　skew product　サドル不動点　fiber Julia 集合　fiber Julia-Lavaurs 集合

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９（共通）

１．研究開始当初の背景

(1)　1 次元及び 2 次元複素力学系の研究において放物的不動点が分岐するときに Julia 集合が不連続に変化することが知られている。この現象は parabolic implosion と呼ばれ、1 次元の場合は多くの研究者によって研究されてきた。2 次元においても最近は wandering domain の構成などに応用されている。筆者は $\mathbb{C}^2$ 上の polynomial skew product $f(z,w) = (z^2, w^2 + 2(1-z)w)$ の fiber Julia 集合の振る舞いが parabolic implosion における Julia 集合のそれに酷似していることを数値実験により発見した (図 1, 2 参照)。この f は、その 2 つのサドル不動点 (0,0) と (1,0) の間に関係がある､即ち (0,0) の安定多様体 $W^s(0,0)$ と (1,0) の不安定多様体 $W^u(1,0)$ が交わるという性質を持つ。実際、$W^s(0,0) \cap W^u(1,0) = \{|z| < 1\} \times \{0\}$ が成り立つ。

図 1. Parabolic implosion における filled Julia 集合 K_c（黒い部分）($f(z) = z^2+c$)

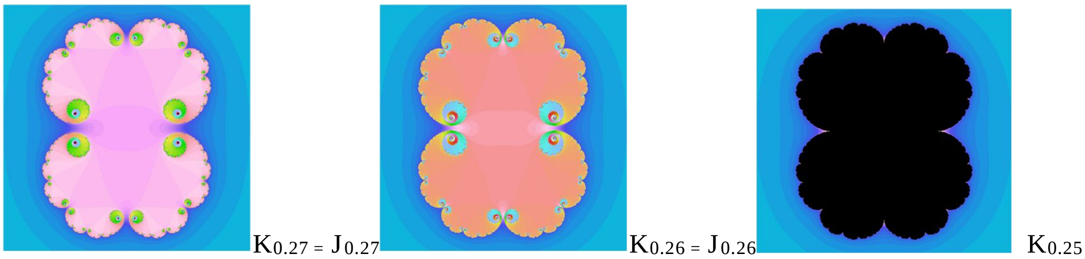
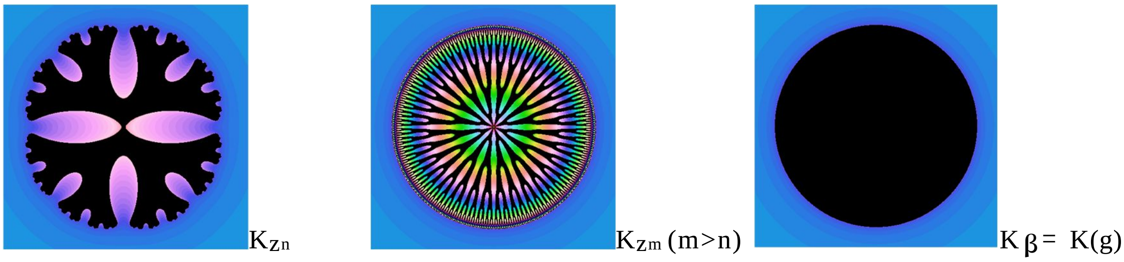


図 2．スーパーサドルでの fiber filled Julia 集合 K_z ($f(z,w) = (z^2, w^2 + 2(1-z)w)$)

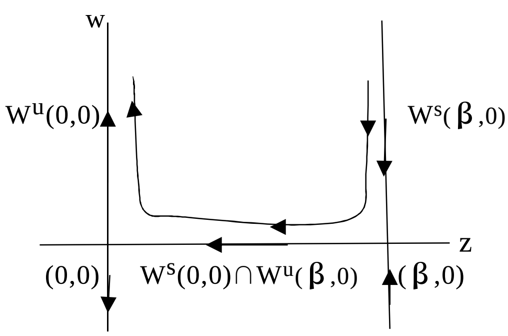


(2) $\mathbb{C}^2$ 上の polynomial skew product $f(z,w) = (p(z), q_z(w))$ において、次を仮定する。

① p は吸引的不動点 0 と、その直接鉢 U の境界上に反発的不動点 β を持つ。
② $q_z(0) \equiv 0$ かつ、(0,0) と(β,0) は f のサドル不動点である。

すると $W^s(0,0) \cap W^u(\beta,0) = U \times \{0\}$ が成り立つ。
$W^s(\beta,0)$ の近くの点 (z,w) の軌道は、図 3 のように、まず $W^s(\beta,0)$ に沿って (β,0) に近づき､次に $W^s(0,0) \cap W^u(\beta,0)$ に沿って (0,0) に近づく。そして $W^u(0,0)$ に沿って (0,0) から離れてゆく。(z,w) を $W^s(\beta,0)$ に近づけると、その軌道がこのように 2 つのサドル不動点の近傍を通過するのに要する反覆回数はいくらでも大きくなる。この軌道の振る舞いは放物的不動点が 2 つに分岐した後の軌道の振る舞いとよく似ているので、parabolic implosion と類似の理論を構成することによって fiber Julia 集合の挙動を説明できることが期待される。

図 3. サドル不動点の付近を通る軌道



２．研究の目的

(1) 2 つのサドル不動点の間に関係があるときに implosion の理論を構成する。
Polynomial skew product $f(z,w) = (p(z), q_z(w))$ が上記の １の (2) の仮定を満たすとする。
$z_j := p^j(z)$, $Q_z^n(w) := q_{z_{n-1}} \circ \cdots \circ q_z(w)$ と定義すると、f の n 回反覆は $f^n(z,w) = (p^n(z), Q_z^n(w))$ と表される。β に収束する U 内の点列 $\{z_n\}$ に対し、写像列 $\{Q_{z_n}^{k_n}\}$ が 0 の近傍で、ある写像 g (Lavaurs 写像という) に広義一様収束するような整数列 $k_n \to \infty$ が存在するための条件を与える。

(2) Polynomial skew product f に対し、fiber filled Julia 集合を $K_z := \{w \in \mathbb{C}; \{Q_z^n(w)\}$ が有界$\}$, fiber Julia 集合を $J_z := \partial K_z$ と定義する。Implosion の理論を応用して J_z と K_z の $z \to \beta$ のときの挙動を考察する。Lavaurs 写像 g を用いて fiber Julia-Lavaurs 集合 J(g), fiber filled Julia-Lavaurs 集合 K(g) を $J(g) := (g^{-1}(J_0))^{cl}$, $K(g) := K_\beta \setminus g^{-1}(\mathbb{C} \setminus K_0)$ と定義する。ここで、X^{cl} は X の閉包を表す。これらが各々 J_{z_n}, K_{z_n} のハウスドルフ距離の意味での極限の候補である。$J_{z_n} \to J(g)$, $K_{z_n} \to K(g)$ を満たすための条件を与える。

３．研究の方法

(1) Parabolic implosion の理論においては、$\{f^{k_n}\}$ の収束を示すために、放物的不動点での Fatou 座標を考えることにより f を簡単な写像 $T(w) = w + 1$ に変換した。我々の場合、Fatou 座標に対応するものはサドル不動点での線形化座標である。2 つのサドル不動点で f が線形化可能な場合は、この座標で考えることで $\{Q_{z_n}^{k_n}\}$ が収束するための条件を与える。

(2) 線形可能でない場合として、サドル不動点がスーパーサドルの場合、即ち f のヤコビ行列の固有値の 1 つが 0 の場合を考える。$(\beta,0)$ がスーパーサドルの場合は $\{Q_{z_n}^{k_n}\}$ の極限が恒等的に 0 という写像しかないことを示す。

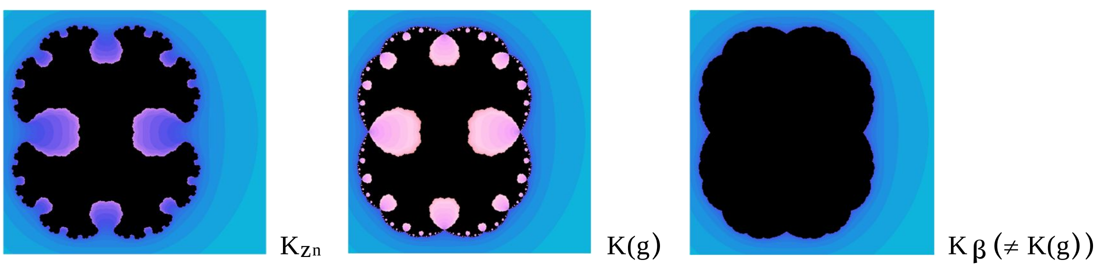
(3) (0,0) がスーパーサドルの場合は、形式的な標準形の存在が知られているので、その形式的共役写像が収束するための条件を求める。収束する場合は線形化座標の代わりに標準化座標で考えることで、線形化可能な場合と同様の議論が可能である。

４．研究成果

(1) Polynomial skew product $f(z,w) = (p(z), q_z(w))$ を上記 １ の (2) の ①，② を満たすとし、更に 2 つのサドル不動点で f は線形化可能と仮定する。β に収束する U 内の点列 $\{z_n\}$ をとる。p の不動点 0，β での基本領域を F_0，F_β とすると、$p^{m_n}(z_n) \in F_\beta$, $p^{l_n}(z_n) \in F_0$ を満たす整数列 $l_n > m_n \to \infty$ が一意的に存在する。このとき、$\{p^{m_n}(z_n)\}^{cl} \subset U$ と仮定する。すると、次が成り立つ。(図 4 参照)

① 整数列 $k_n \geqq l_n$ が $(Q_{z_n}^{k_n})'(0) \to \sigma$ を満たせば、$\{Q_{z_n}^{k_n}\}$ は $w = 0$ の近傍で、ある写像 g に広義一様収束する。Lavaurs 写像 g は $W^s(\beta,0) \to W^u(0,0)$ の写像とみなすと、線形化座標では $m(w) = \sigma w$ と表される。
② $\limsup K_{z_n} \subset K(g)$，$\liminf J_{z_n} \supset J(g)$.
③ K_β の内部が $W^s(\beta,0)$ と一致すれば、$K_{z_n} \to K(g)$，$J_{z_n} \to J(g)$.

図 4．線形化可能な場合の fiber filled Julia 集合 K_z と fiber filled Julia-Lavaurs 集合 K(g)



(2) $(\beta,0)$ がスーパーサドルと仮定する($q_\beta'(0) = 0$)。更に、q_0 は双曲的とし、U の点列 $z_n \to \beta$ に対し、$p^{m_n}(z_n) \in F_\beta$ を満たす整数列 $\{m_n\}$ が一意的に存在する。このとき、$\{p^{m_n}(z_n)\}^{cl} \subset U$ と仮定する。すると、$p^{k_n}(z_n) \to 0$ を満たす整数列 $\{k_n\}$ に対して次が成り立つ。

① $\{Q_{z_n}{}^{k_n}\}$ の 0 の近傍での広義一様収束部分列の極限 g（Lavaurs 写像）は常に $g \equiv 0$.

すると、$J(g) := (g^{-1}(J_0))^{cl} = W^s(\beta,0)^{cl}$，$K(g) := K_\beta \setminus g^{-1}(\mathbb{C}\setminus K_0) = K_\beta$である。

② $\liminf J_{z_n} \supset W^s(\beta,0)^{cl}$ (= J(g)).
③ K_β の内部が $W^s(\beta,0)$と一致すれば、$J_{z_n} \to K_\beta$ (= J(g)), $K_{z_n} \to K_\beta$ (= K(g)).

これにより、1 の①で述べた例の数値実験の結果（図 2 参照）が正当化された。
次に q_0，q_β は双曲的とし、それらの 0 以外の吸引的周期点の集合を各々 A_0，A_β と書く。
$\{m_n\}$ は上で定義した整数列とする。このとき、

④ $W^u(\{\beta\}\times A_\beta) \cap (\{p^{m_n}(z_n)\}^{cl}\times\mathbb{C}) \cap W^s(\{0\}\times J_0) = \phi$ ならば $J_{z_n} \to W^s(\beta,0)^{cl}$ (= J(g)).
⑤ $W^u(\{\beta\}\times A_\beta) \cap (\{p^{m_n}(z_n)\}^{cl}\times\mathbb{C}) \subset W^s(\{0\}\times A_0)$ ならば $K_{z_n} \to K_\beta$.
⑥ $W^u(\{\beta\}\times A_\beta) \cap (\{p^{m_n}(z_n)\}^{cl}\times\mathbb{C}) \subset W^s([0:1:0])$ ならば $K_{z_n} \to W^s(\beta,0)^{cl}$.

⑤、⑥の例：$f(z,w) = (z^3, w^3 - 3iw^2/\sqrt{2}+3(1-z)(1+w)w)$,　$A_0 = \{-1\}$，$A_\beta = \{\sqrt{2}i\}$.

図 5．⑤の例：$z_n \nearrow \beta = 1$,　$K_{z_n} \to K_\beta$，$J_{z_n} \to W^s(\beta,0)^{cl}$ (= J(g)).

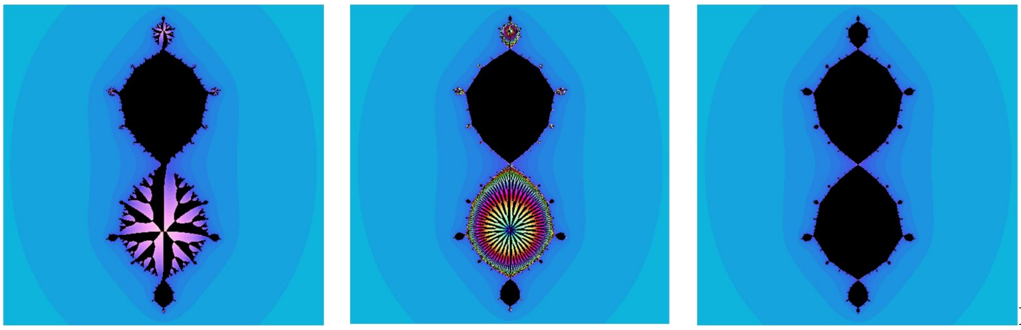
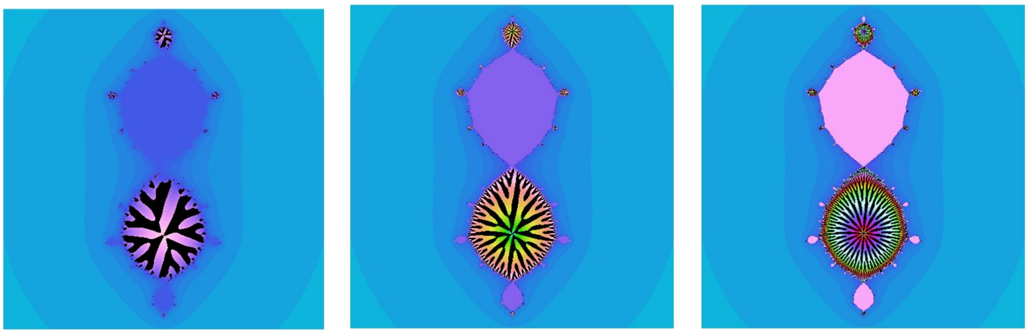


図 6．⑥の例：$z_n = 1 - 10^{-n} + 10^{-n+1} i$,　J_{z_n}, $K_{z_n} \to W^s(\beta,0)^{cl}$.



(3) (0,0) がスーパーサドルと仮定する。$p(z) = z^d$ 、つまり、$f(z,w) = (z^d, q_z(w))$ としてよい。$q_0(w) = \lambda w + O(w^2)$ とすると、f は $f_0(z,w) = (z^d, \lambda w)$ と形式的に共役であることが知られている（Ruggiero)。つまり、(0,0) での形式的べき級数 $\Phi(z,w) = (z, \varphi(z,w))$ が存在して $f\circ\Phi = \Phi\circ f_0$ を満たす。このとき、次が成り立つ。

① $q_0(w) = (w+1)^d - 1$ ならば（従って $\lambda = d$)、Φは (0,0)で正則である。このときは、線形化可能な場合、つまり (1) と同様の結果が得られる。

② $q_0(w) \neq (w+1)^d - 1$ ならば、generic な仮定の下で、Φは (0,0)で正則ではない。

＜引用文献＞

M. Ruggiero, Rigidification of holomorphic germs with non-invertible differentials, Michigan Math. J. 61, (2012), 161-185.

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計2件（うち査読付論文　2件／うち国際共著　0件／うちオープンアクセス　0件）

１．著者名 Shizuo Nakane	４．巻 149
２．論文標題 Fiber Julia sets of polynomial skew products with super-saddle fixed points	５．発行年 2021年
３．雑誌名 Proceedings of the American Mathematical Society	６．最初と最後の頁 2539-2550
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1090/proc/15345	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

１．著者名 H. Inou, S. Nakane	４．巻 68
２．論文標題 An implosion arising from saddle connection in 2D complex dynamics	５．発行年 2019年
３．雑誌名 Indiana University Mathematics Journal	６．最初と最後の頁 35-61
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1512/iumj.2019.68.7577	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

〔学会発表〕　計7件（うち招待講演　0件／うち国際学会　1件）

１．発表者名 Shizuo Nakane
２．発表標題 Finger-like structures in polynomial skew products
３．学会等名 RIMS complex dynamics conference 2019
４．発表年 2019年

１．発表者名 Shizuo Nakane
２．発表標題 Fiber Julia sets for maps with super-saddle fixed points
３．学会等名 日本数学会
４．発表年 2018年

１．発表者名 Shizuo Nakane
２．発表標題 Fiber Julia sets for maps with super-saddle fixed points
３．学会等名 RIMS complex dynamics conference 2018
４．発表年 2018年

１．発表者名 中根　静男
２．発表標題 On formal normal forms of holomorphic germs at super-saddle fixed points
３．学会等名 日本数学会
４．発表年 2017年

１．発表者名 Shizuo Nakane
２．発表標題 On formal normal forms of holomorphic germs at super-saddle fixed points
３．学会等名 Workshop on Complex Dynamics
４．発表年 2017年

１．発表者名 Shizuo Nakane
２．発表標題 An implosion arising from saddle-connection in 2D complex dynamics
３．学会等名 Workshop on Holomorphic Dynamics : Geometry of Julia sets in one and more complex variables（国際学会）
４．発表年 2016年

1．発表者名 中根静男
2．発表標題 A remark on the normalization of holomorphic germs at super-saddle fixed points
3．学会等名 京都力学系セミナー
4．発表年 2016年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

―

6．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考
連携研究者	稲生　啓行 (Inou Hiroyuki) (00362434)	京都大学・理学研究科・准教授 (14301)	

7．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

8．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関