

令和元年6月10日現在

機関番号：10101

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2016～2018

課題番号：16K05218

研究課題名(和文) 特異あるいは極端形状をもつ領域と楕円型方程式系

研究課題名(英文) Singular or extreme shaped domain and elliptic system

研究代表者

神保 秀一 (JIMBO, Shuichi)

北海道大学・理学研究院・教授

研究者番号：80201565

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,900,000円

研究成果の概要(和文)：一様で等方的材質をもつ非一様な形状をもつ細い弾性体の固有振動に関する作用素を研究し、固有値の分布を解明した。曲げモードは細い領域においては固有値が小さくゼロ近傍に集積する。これの精密な漸近公式を領域の極限の線分上の方程式系として特徴付けた。伸縮モードおよび捻れモードに相当する固有値の挙動を軸対称な場合に導出した。それらは変数係数の2階の常微分方程式となる。地球地震学に現れる作用素のスペクトルの構造を解析した。液体と固体が混在する弾性体をモデル化した線形楕円型作用素であり、離散スペクトル以外のものが発生し本質的スペクトルが生じる。そして複素平面で有界集合をなすこと示した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究は力学的な自然現象のモデル方程式の数学解析を行っている。建物や橋の構造などの運動に関連する方程式のスペクトル解析を行った。これらは物体の振動や安定性などの解析に密接に関連する数学理論である。偏微分方程式理論では単独の楕円型方程式に対してこのような特異的な形状依存性の研究が従来行われてきたが、本研究では上記のように身近な物理現象に関連する課題に密接に関連する数学的成果を得たことが意義が深いと思われる。

研究成果の概要(英文)：Eigenfrequencies of an elastic body of uniform and isotropic material but with an extremely thin shape with non-uniform cross-section are studied. The distribution of eigenvalues and their structure was analyzed. The eigenfrequencies of the bending mode were proved to be very small for thinner limit and elaborate behavior were described by the aid of a certain 4-th order ODE operator with variable coefficients. The eigenfrequencies corresponding to the Stretching mode and the Torsion mode are also analyzed and the limiting behaviors were described by a certain 2nd order ODE operator, respectively in the case that the thin domain is axisymmetric. The spectrum of the elliptic operator which arises as a vibration model in the geophysics was studied and it is proved that the essential spectrum is bounded in the complex plane while discrete spectrum is unbounded.

研究分野：応用解析学, 偏微分方程式

キーワード：特異的領域変形 楕円型方程式系 スペクトル解析

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

波動現象において観測データや量が、現象の土台としての空間や媒質の幾何的な形状を本質的に反映する。吹奏楽器において、内部の空洞の形状が励起される音程を決める主要なファクターとなる(人間の声も同じ)。弾性体の振動も類似のことが現れる。地震が建物を振動させる際の低い建物と高い建物に与える異なる効果や、亀裂や欠陥の有無の特徴的な影響などである。また細かい骨組みをもつタワーや橋の振動構造も幾何的要因が重要となる。電磁波の受信に關してのアンテナ特性や複雑な微細構造をもつ物質の伝える光も形状依存性ととらえるべきテーマである。空気や川の流れにおいて障害物や湾曲した境界の形状による流れが不安定化を起こす。これらの仕組みや因果関係の問題は数学的には偏微分方程式の解の性質の領域形状依存性の課題である。特に方程式の中に作用素の固有値や固有関数が主役を担っている。またこれらの課題では滑らかな領域変形(摂動)のみならず、特異的な領域変形(領域摂動)の問題とみなされるものも多い。このような観点からの数学研究 1960 年代に始まり現代まで様々な成果がある。Courant-Hilbert, Swanson, Ozawa, Besson, Chavel-Feldman, Jimbo, Maz'ya, Nazarov, Plamenevskij Lanza de Cristoforis らの仕事では特異的な領域変形下でのラプラス作用素の固有値の摂動公式が様々な状況で得られた。一方 2000 年以降にはラメの方程式系やストークスの方程式系に關しても領域変形と固有値の摂動に關する仕事が見られている。これらの中には Maz'ya, Nazarov, Plamenevskij, Ammari, Habib, Kang, Ciarlet, Kozlov, Ushikoshi, Jimbo などの仕事がある。これらの仕事の延長線に本課題はある。

2. 研究の目的

本研究では上記の背景の下にラメの方程式系(L)やストークスの方程式系(S)に關して領域変形の観点から研究する。特に、その方程式系の主要部として現れる作用素の固有値問題や対応する固有関数の幾何的な特性を研究する。(L)は波動現象、(S)は流体現象に關連するがそれぞれ主要部にシステムの楕円型作用素を含み、ラメ作用素、ストークス作用素と呼ぶことにする。

(L) [弾性体の振動は次のラメ作用素の固有値問題]

非一様な断面をもつ細い領域は極限として有限の線分に退化する。この領域においてラメ作用素の固有値問題の固有値のみからなるスペクトルをもつことが関数解析の一般的議論からすぐわかる。その分布を詳しく解明することが目的である。固有値の全体は細い弾性体においては振動の変形の幾何的な違いから曲げモード(Bending mode)、捻れモード(Torsion mode)、伸縮モード(Stretching mode)に分かれる。曲げモードは細い領域においては固有値が小さくゼロ近傍に集積する。これの精密な漸近公式を領域の極限の線分上の方程式系に帰着させて特徴付ける。これは先行研究の特別なケースから見ると4階の常微分方程式となることが予想される。一方、他のモード(伸縮モードおよび捻れモード)はあまりゼロに接近しないと予想されその特徴付けを考える。

(S) [ストークス作用素の固有値問題]

ラメの作用素において第2ラメ定数(剛性率)がゼロに近づく極限においてシステムはストークス作用素に接近すると予想されるためラメ作用素と同様の課題をストークス作用素においても研究する。細長い領域においてストークス作用素に対して流体現象において起こるスリップ境界条件を課した固有値の分布を考察する。

(L-S) [多項式解の構造]

上記の2項目に關連してそれぞれの斉次方程式の多項式解の代数的構造を調べる。次数毎に解の表現及び生成法を研究する。これらは(L)、(S)において真の固有関数を近似する試験関数を構成するために応用する。

3. 研究の方法

研究目的に向かつて今までの研究過程において培ってきた応用解析的な方法を適用して上に記述した特異的な領域変形に關する上記のスペクトル問題に取り組む。具体的には、適当なエネルギー汎関数を用いて最小値問題によって固有値の特徴付けを行う。精密な近似固有関数を構成して固有値の評価を行う。さらには弱形式の方式による変分方程式の解の弱収束極限を経由して極限方程式を導出するアプローチを行う。これらの方法はいくつかの先行研究を改良して得たものである。いわばコルンの不等式を導出する方法の中のメカニズムを部分的に働かせるやり方である。これらを複眼的に適用して目的に接近してゆく方法を取る。

4. 研究成果

(1) 斉次のラメの方程式系およびストークス方程式系のすべての多項式解を構造した。次数毎の部空間も調べた。多項式解全体を単位球面 S^{n-1} に制限したものが $L^2(S^{n-1})$ において稠密になることを示した。

(2) 弾性体の固有振動：一様で等方的材質をもつ非一様な形状をもつ細い弾性体の固有振動に關するモデル方程式を研究した。弾性体に相当する細い領域は極限として有限の線分に退化する。この領域において、そのスペクトルをなす固有値の分布を詳しく解明した。固有値の全体は細い弾性体においては振動の変形の幾何的な違いから曲げモード(Bending mode)、捻れモード(Torsion mode)、伸縮モード(Stretching mode)に分かれる。曲げモードは細い領域においては固有値が小さくゼロ近傍に集積する。これの精密な漸近公式を領域の極限の線分上の方

程式系に帰着させて特徴付けた。極限方程式は変数係数の4階の常微分方程式となることを示した。一方、伸縮モードおよび捩れモードに相当するモードに関する解析を行い、軸対称な場合にそれぞれ極限方程式の固有値問題を導出した。それらは変数係数の2階の常微分方程式として特定することができた。

(3) 地球地震学に現れる作用素のスペクトルの構造を解析した。液体と固体が混在する弾性体をモデル化した線形楕円型作用素であり、弾性係数が一部が退化し楕円性を失うため有界領域で考えているにもかかわらず離散スペクトル以外のものが発生し本質的スペクトルが生じる。そして複素平面で有界集合をなすことを正当化することに成功した。T. Kato のスペクトル分解の理論を適用して関数空間を本質的スペクトル(有界)と離散スペクトル(非有界)に対応するものに直交分解することができる。これによって研究をそれぞれの部分空間に属する波の特徴付けに還元することができた。

5 . 主な発表論文等

〔雑誌論文〕(計 8 件)

[1] S. Jimbo, A. Rodriguez Mulet, Asymptotic behavior of eigenfrequencies of a thin elastic rod with non-uniform cross-section, J. Math. Soc. Japan, in press. (査読有)

[2] S. Jimbo, Y. Morita, Entire solutions to reaction-diffusion equations in multiple half-lines with a junction, J. Differential Equations, **267** (2019), 1247-1276. (査読有)

[3] N. Honda, K. Umeta, Laplace hyperfunctions in several variables, J. Math. Soc. Japan, **70** (2018), 111-139. (査読有)

[4] S. Jimbo, H. Kozono, Y. Teramoto, E. Ushikoshi, Hadamard variational formula for eigenvalues of the Stokes equations and its application, Math. Anal. **368** (2017), 877-884. (査読有)

[5] T. Aoki, N. Honda, S. Yamazaki, Foundation of symbol theory for analytic pseudodifferential operators, I, J. Math. Soc. Japan, **69** (2017), 1715-1801. (査読有)

[6] S. Jimbo, Y. Morita, Nonlocal eigenvalue problems arising in a generalized phase-field-type system, Japan J. Indust. Appl. Math. **34** (2017), 555-584. (査読有)

[7] S. Jimbo, K. Kurata, Asymptotic behavior of eigenvalues of the Laplacian on a thin domain under the mixed boundary condition, Indiana Univ. Math. J. **65** (2016), 867-898. (査読有)

[8] N. Honda, L. Prelli, S. Yamazaki, Multi-microlocalization and microsupport, Bull. Soc. Math. France, **144** (2016), 569-611. (査読有)

〔学会発表〕(計 8 件)

[1] 神保秀一, Y-shaped graph and time entire solutions of a semilinear parabolic equation, 反応拡散方程式 -- 伝播現象と特異性の解析および諸科学への応用, 京大数理研. 2018年10月24日-26日.

[2] Shuichi Jimbo, Eigenvalue problem of the Laplacian in a domain with a thin tubular hole, The third international conference on the Dynamics of Differential Equations -- In memory of Prof. Jack Hale, Hiroshima Univ.. 2018年3月14日-18日.

[3] Shuichi Jimbo, Y-shaped graph and time entire solutions of a semilinear parabolic equation, Differential Equations and Networks, Tohoku Univ., 2018年1月11日-12日.

[4] Shuichi Jimbo, Y-shaped graph and reaction diffusion equation, Qualitative Theory on Nonlinear Partial Differential Equations, Okayama Univ., 2017年9月17日-19日.

[5] Shuichi Jimbo, Y-shaped graph and time entire solutions of a semilinear parabolic equation, Geometry of solutions of PDE's and its related inverse problem, Tohoku Univ.,

2016年10月5日-7日.

[6] 伊東裕也, 神保秀一, 本多尚文, ラメ作用素対する球面関数について, 日本数学会, 関数方程式分科会, 関西大学 2016年9月15日-18日.

[7] 神保秀一, 高澤佳宏, 無限Y字型グラフと半線型放物型方程式の時間全域解, 日本数学会, 関数方程式分科会, 関西大学, 2016年9月15日-18日.

[8] Shuichi Jimbo, Y-shaped graph and time entire solutions of a semilinear parabolic equation, 学術報告会, 復旦大学, 数学系, 2016年9月7日.

〔図書〕(計 1 件)

[1] 神保秀一, 微分方程式概論[新訂版], 数理工学社, 173 ページ, 2018.

〔産業財産権〕

出願状況(計 0 件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
出願年:
国内外の別:

取得状況(計 0 件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
取得年:
国内外の別:

〔その他〕

ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究分担者

研究分担者氏名: 本多 尚文

ローマ字氏名: Honda Naofumi

所属研究機関名: 北海道大学

部局名: 理学研究院

職名: 教授

研究者番号(8桁): 00238817

(2) 研究協力者

研究協力者氏名: 伊東 裕也

ローマ字氏名: Ito Hiroya

研究協力者氏名: 牛越 恵理佳

ローマ字氏名: Ushikoshi Erika

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。