様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　　元 年　　６ 月 １９ 日現在

機関番号：１１２０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2016～2018
課題番号：１６Ｋ０５２２０

研究課題名（和文）非線形偏微分方程式におけるパターン形成と界面ダイナミクスの解明

研究課題名（英文）Pattern formation and interfacial dynamics in nonlinear partial differential equations

研究代表者
奈良　光紀（Nara, Mitsunori）

岩手大学・理工学部・准教授

研究者番号：９０５１２１６１

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,600,000円

研究成果の概要（和文）：非線形放物型偏微分方程式の一種であるAllen-Cahn方程式における広がり界面(spreading front)の形成と時刻無限大での漸近挙動を解析した。特に，拡散の効果が空間的に非等方的なAllen-Cahn方程式における界面の漸近形状とフロント部の整形作用を明らかにした。また，双安定型の非線形項を持つAllen-Cahn型バイドメイン方程式について，帯状領域での平面波(planar wave)の安定性を考察し，線形安定性と非線形安定性の関係を明らかにした。

研究成果の学術的意義や社会的意義
本研究では，主として拡散の効果が空間的に非等方的な非線形偏微分方程式における進行波などの解析に取り組んだ。一連の研究成果は，特に生物学・医学生理学における情報伝達機構への理論面からの理解の深化，現象の解明の一助となるものである。

研究成果の概要（英文）：This research mainly dealt with the following two topics; 1) generation and time evolution of spreading fronts in the Allen-Cahn equations, especially in the anisotripic Allen-Cahn equations; 2) nonlinear stability and instability of planar waves in the bidomain equaiton with bistable type nonlinearity on infinite strips.

研究分野：非線形解析

キーワード：偏微分方程式　反応拡散方程式　進行波　界面現象　安定性

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９、ＣＫ－１９（共通）

１．研究開始当初の背景

偏微分方程式の中でも，反応拡散方程式(reaction-diffusion equations)と呼ばれる方程式は，様々な非線形現象を記述する数理モデルとして広く知られており，古くからその理論研究が行われている。特に，これらの方程式で記述される特徴的な現象の一つが，界面(interface)の形成と時間発展である。界面とは，対象となるシステムに存在する相異なる(定常)状態を分ける相境界のことであり，これが着目する非線形現象における空間的・時間的パターンの形成に大きな役割を演じる。界面はしばしば進行波(traveling wave)という形で媒質中を移動し，系の状態変化を周囲に伝達する役割を担う。進行波と界面ダイナミクスの理論的解析は，パターン形成理論における主要なテーマの一つであり，現在に至るまで多くの関連研究が発表されている。

研究代表者はこれまでの研究において，反応拡散方程式を中心とする非線形偏微分方程式に現れる進行波や定常解の安定性解析，時刻無限大における解の漸近挙動の解析，界面の形成と時間発展などのダイナミクスの解析に取り組んできた。

特に，本研究の開始までに得られていた主要な結果としては，以下が挙げられる。

１）平均曲率流方程式(mean curvature flow)における定常解および進行波の安定性
２）Allen-Cahn 方程式における平面波(planar wave)の安定性と解の時間漸近挙動
３）双安定型の非線形項を持つ消散型波動方程式の特異極限
４）非等方的 Allen-Cahn 方程式における広がり界面(spreading front)の漸近挙動

本研究では，上記の一連の研究成果を更に新しい方向に発展させることを目的とし，特に，Allen-Cahn 方程式を中心とした非線形偏微分方程式における界面ダイナミクスの解明に焦点を当て，研究を遂行した。具体的なテーマは次項に述べる通りである。

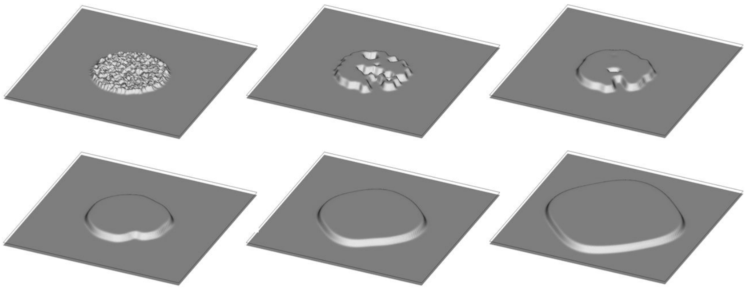

図１：非等方的 Allen-Cahn 方程式における spreading front の数値計算例

２．研究の目的

本研究の主要なテーマは，以下の２点である。
（１）非等方的および等方的 Allen-Cahn 方程式における広がり界面の解析
（２）Allen-Cahn 型バイドメイン方程式における平面波の安定性の解析

（１）においては，従来の研究をより応用的な方向に発展させるべく，以前から広く研究されている等方的 Allen-Cahn 方程式と，拡散の効果が非等方的(anisotropic)な性質を持つ Allen-Cahn 方程式における進行波の性質や界面ダイナミクスの解明を目標とした。これらの方程式は，以下のように与えられる。

等方的 (isotropic) Allen-Cahn 方程式　$u_t = \Delta u + f(u)$

非等方的 (anisotropic) Allen-Cahn 方程式　$u_t = \operatorname{div} a_p(\nabla u) + f(u)$

等方的な方程式では，拡散項が通常の Laplacian を用いて Δu と与えられる。一方，非等方的な方程式では，２次の斉次関数 $a : \mathrm{R}^n \to [0,\infty)$を用いて，この部分が div $a_p(\nabla u)$と置き換えられる。そのため，非等方的 Allen-Cahn 方程式では，方向毎に拡散の強さが異なり，よって方向毎に進行波の伝播速度も異なる。これは，現実の物理現象・生命現象などにおいて，空間方向毎に情報の伝達速度が(少なからず)異なることに対応する。このような状況下における情報伝達とパターン形成を解析することは，理論研究をより応用的かつ実践的な方向に発展させるために重要であると考えられる。

そこで本研究では，非等方的 Allen-Cahn 方程式における広がり界面(spreading front)の形成過程と，その漸近挙動や安定性の解明を目的とした。これまでの研究において，解の存在や正則性，比較定理の成立などは明らかになっていた。また，広がり界面の形状についても，これが拡散の非等方性から定まる Wulff 図形に漸近することが明らかになっていた。本研究では，界面の形成過程や $t \to \infty$での漸近挙動を更に詳細に解析することを目的として，研究に取り取り組んだ。

（2）においては，Allen-Cahn 方程式と同様の双安定型の非線形項を持つバイドメイン方程式における平面波の安定性解析を目的とした。バイドメイン方程式は，心筋組織における２次元（あるいは３次元）的な神経パルスの伝播の様子を記述するモデル方程式である。連立の偏微分方程式であるが，フーリエ変換により単独の擬微分方程式に変形される。具体的に，フーリエ変換 F を用いて，擬微分作用素 Lu を次のように定義する。

$$Lu = -\mathcal{F}^{-1}Q\mathcal{F}u, \quad Q(\mathbf{k}) = \frac{Q_i(\mathbf{k})Q_e(\mathbf{k})}{Q_i(\mathbf{k}) + Q_e(\mathbf{k})}$$

ここで，Q_i(k)，Q_e(k)，(k∈R^2)は，神経細胞内部と外部の電気伝導率の異方性に対応する２次の斉次関数である。この擬微分作用素は，バイドメイン作用素と呼ばれており，反応拡散型偏微分方程式における拡散項を,バンドメイン作用素で置き換えた非線形バイドメイン方程式は,心臓の電気生理を表す標準的モデルとして 1970 代に提案されている。バイドメイン方程式は医学生理学に関する重要な数理モデルであるが，その解析の困難さから，理論研究の成果は限られている。

本研究では，バイドメインモデルの解析の第一歩として，Allen-Cahn 方程式のラプラス作用素をバイドメイン作用素で置き換えた Allen-Cahn 型バイドメイン方程式を研究の対象とし,特に帯状領域における平面波の安定性の解明を目的とした。

３．研究の方法

研究遂行の手法は，主として，放物型偏微分方程式および擬微分方程式に関する解析的手法を基にした理論研究,および数値シミュレーションである。数値計算には, C 言語及び MATLAB を使用した。また，明治大学および米国ミネソタ大学の研究者との共同研究として，研究活動を進めた。

４．研究成果

（1）Allen-Cahn 方程式における広がり界面の形成と漸近挙動

非等方的 Allen-Cahn 方程式ける広がり界面の形成と漸近挙動に関する一連の研究成果を論文にまとめ，学術誌に発表した。得られた結果の要点は，１）初期値に関する比較的妥当な条件の下で，解が広がり界面を形成する，2）界面の形状は，拡散の非等方性から定まる Wulff 図形に漸近する，３）界面には局所的に平面波に漸近するような整形作用が働く，の３点にまとめられる。特に，界面の整形作用により，等高面の法線ベクトルの収束や，等高面の内部領域の単調増大性が示される点が，既存の結果に対する新規性である。証明の要点は，１）弱解の定義と一意存在，２）弱解に対する比較定理，３）Wulff 図形を利用した優解(super-solution)・劣解(sub-solution)の構成，４）全域解(entire solution)の特徴付けに基づく時刻無限大でのフロント部の整形作用の解析，から成る。

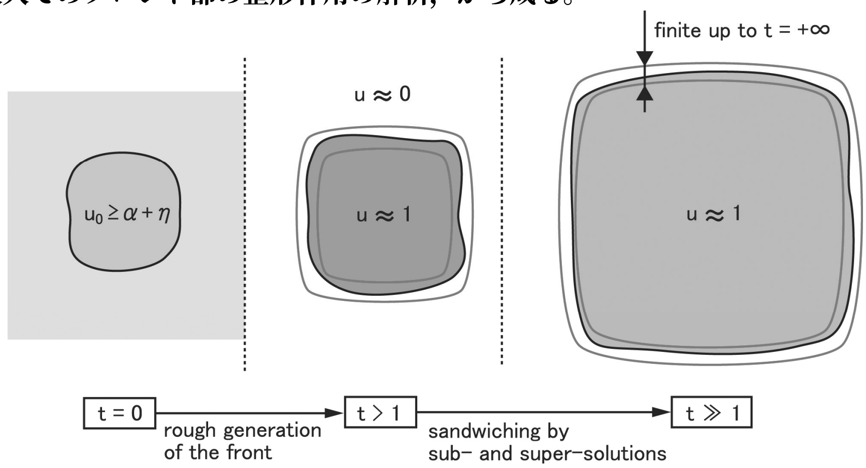

図２：界面の形成と漸近挙動（Wulff 図形を利用した優解と劣解）

また，上記の手法は，従来から広く研究されている等方的 Allen-Cahn 方程式に対しても有効であり,その広がり界面の挙動に関しても既存の結果を改善することが出来た。具体的には，ｔ→∞の極限で，界面の等高面が球面状の形に漸近収束することを示した。これは等方的な方程式に関する既存研究の結果や，等方的な方程式でのみ適用可能な Reflection argument などを活用することで得られた結果である。これらの結果は複数の研究集会・セミナー・国際会議にて発表した。また，2017 年度には，海外の研究者を少数招いて，主として偏微分方程式に現れる進行波に関わる小規模な研究集会を開催し，最新の研究状況を把握すると共に，研究者間の研究討議を行った。

２）Allen-Cahn 型バイドメイン方程式については，帯状領域における進行波の安定性・不安定性の解析を進めた。この擬微分方程式は，Allen-Cahn 方程式などの放物型方程式とは異なり，最大値原理や，解の比較定理が成り立たない。これがこの問題を解析するうえの困難な点の一つであった。まず，フーリエ変換から得られる線形バイドメイン方程式の基本解の評価から，時間局所解の存在や，解の正則性に関する結果を得た。

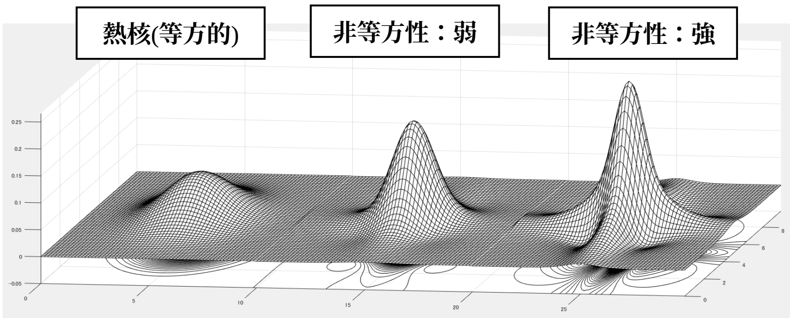

図３：基本解の形状（左：熱核，中央・右：線形バイドメイン方程式の基本解）

また，既存研究で知られている線形安定性（線形化作用素のスペクトル）に関する結果に基づき，線形安定性と非線形安定性の関係を明らかにした。更に，帯状領域の幅を分岐パラメータとし，平面波の不安定化によりホップ分岐が生じる状況を考察した。今後，この研究をさらに推し進めることで，バイドメイン方程式における平面波の不安定化メカニズムの解明につながることが期待される。研究成果の一部は，国際会議にて発表した。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計１件）
① H. Matano, Y. Mori, and M. Nara, 査読有
"Asymptotic behavior of spreading fronts in the anisotropic Allen-Cahn equations on R^n",
Annales de l'Institut Henri Poincaré C, Analyse Non Linéaire, Vol.36, pp.585-626, 2019.
https://doi.org/10.1016/j.anihpc.2018.07.003

〔学会発表〕（計４件）
① 奈良光紀, "Stability of front solutions of the bidomain equation on a strip",
The 12th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications,
National Taiwan University, 2018年7月.

② 奈良光紀, "Spreading fronts in the anisotropic Allen-Cahn equations on R^n",
GDRI ReaDiNet Conference "Reaction-Diffusion Systems in Mathematics and Biomedicine",
Villa Clythia, 2016年9月.

③ 奈良光紀, "Large Time Behavior of the Solutions with Spreading Fronts in the Allen-Cahn Equation", The 11th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, Hyatt Regency Orlando, 2016年7月.

④ 奈良光紀, "Spreading Fronts in the Anisotropic Allen-Cahn Equations on R^n",
The 11th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications,
Hyatt Regency Orlando, 2016年7月.