様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　元 年　 ６ 月 １２ 日現在

機関番号：１８００１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2016～2018
課題番号：１６Ｋ０５２２１

研究課題名（和文）幾何解析と超局所解析の展開

研究課題名（英文）Deevelopment of Geometric and Microlocal Analysis

研究代表者
千原　浩之（CHIHARA, Hiroyuki）

琉球大学・教育学部・教授

研究者番号：７０２７３０６８

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,600,000円

研究成果の概要（和文）：本研究では、曲がった空間上の関数や曲がった空間の間の写像を対象とする解析学や超局所解析に関連した関数解析学を発展させること目的としている。具体的にはユークリッド空間上のバーグマン型とよばれる積分変換に関連する関数解析学などについていくつかの成果が得られた。最も代表的な成果は、複素ユークリッド空間上のシーガル・バーグマン空間とよばれる整関数のなす再生核ヒルベルト空間において、任意に与えられたガウス型正則関数がこの空間の元となり、正準交換関係をみたす生成作用素や消滅作用素をもち、完全正規直交系の生成元となるための必要十分条件を与えたことである。

研究成果の学術的意義や社会的意義
本研究の成果は、これまでバーグマン型の積分変換やシーガル・バーグマン空間とは無関係に個別かつ具体的に研究されてきたいくつかの話題に関して、正統派と考えられるこれらの視点を導入し、従来よりも深い理解が得られた、あるいは、一般論を構築して従来の知見は特殊な具体例であることを示したものが多い。また、研究対象が、解析学だけでなく組合せ論の数え上げや特殊関数論などに一見無関係な話題と関連して発展する可能性がある。

研究成果の概要（英文）：The purpose of this project is to study the analysis of functions on manifolds and mappings between manifolds, and the functional analysis related to microlocal analysis. We have some results concerned with functional analysis on the Bargmann-type integral transforms on the Euclidean spaces. The most important results of this project is to obtain the necessary and sufficient conditions on holomorphic gaussian functions on the complex Euclidean spaces so that they have creation and annihilation operators satisfying the canonical commutation relations and become generators of the complete orthonormal system on the Segal-Bargmann space, which is a reproducing-kernel Hilbert space of entire functions.

研究分野：幾何解析

キーワード：シーガル・バーグマン空間　バーグマン変換　エルミート展開

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９、ＣＫ－１９（共通）

１．研究開始当初の背景

本研究は、多様体上の関数や多様体の間の写像や写像流に対する解析学を構築することを主な目的としている。そのため、微分幾何学とある程度以上の関りがあるが、一方で関数を詳しく観察する手法の一つに超局所解析があり、特にユークリッド空間上ではバーグマン型の積分変換とよばれる複素数値相関数をもつフーリエ積分作用素を通じた超局所化が強力な手法になっている。この手法に関連する超局所解析やより広く関数解析学、および、多様体の上においても超局所解析や幾何解析の発展に関わることを目指している。

幾何解析については、特に分散型写像流の偏微分方程式系として知られている 2 階、3 階、および、4 階のすべての方程式系について、数式が意味をなす最大限に幾何学的設定を一般化した初期値問題の時間局所解の存在定理を既に筆者らの研究により確立してきたが、解の長時間の存在定理や挙動はわかっていない状態であり、どうすれば調べることができるのかが全く手掛かりもなく、有効な方法をただ模索していた。

超局所解析については、ユークリッド空間上のバーグマン型の積分変換による超局所化に関連したいくつかの研究課題があるという状況であった。

２．研究の目的

本研究の具体的な目的は、１つは分散型偏微分方程式系にしたがう 2 つの多様体の間の写像流の初期値問題の幾何解析の発展で特に解の長時間の存在や挙動を解明することである。より具体的には、ある種の写像に時刻無限大で収束するのか、あるいは、散乱のような現象が起こるのか、そもそも多様体値の関数に対して散乱のような現象を記述するのはどうすればよいのか、ということを解明したいと考えていた。

一方、超局所解析についてはバーグマン型の変換に関連していくつかの関数解析の課題があり、それらに取り組むことを目的としていた。具体的にはある種の Gevrey 級関数族や双対空間におけるシュレーディンガー型発展方程式の解の超局所解析、古典的なバーグマン変換の積分核がエルミート関数系の母関数であることに着目したエルミート展開の計算手法の開発、非可換性の弱いハイゼンベルグ群にバーグマン変換が付随しているが、ハイゼンベルグ群を一般化した非可換性の比較的弱い群が知られており、それに付随するバーグマン型変換や積分核の生成元であるエルミート関数系の対応物は何か、などのいくつかの具体的な課題に取り組むつもりであった。

３．研究の方法

分散型写像流については、手掛かりが極めて乏しく模索するしかなく、成果を挙げることはできなかった。この種の偏微分方程式系の解を構成するときには標的多様体の管状近傍値の解の近似物を構成し、さらに標的多様体へ射影するという手法を用いるが、値域を管状近傍に拡大して考えることで散乱理論を構築する手掛かりにはなるかもしれないところまでは考えた。

一方、バーグマン型の変換に関連した関数解析については、まずできること、取り組みやすいことから順に取り組んだが、ささやかな論文を学術雑誌のみならずプレプリント・サーバーの arXiv にも投稿したところ、外国の超局所解析とは無関係な特殊関数と量子化の交差点のような分野のベテラン研究者から反応があり、それをきっかけに課題が生まれてさらにささやかな研究が続いた。他にいくつかより高度で興味深い課題もあるがまだ着手できていない。

さて、2017 年 2 月の Nature 誌や Science 誌に，「Vasy-Stefanov-Uhlmann らが境界付きリーマン多様体の境界の剛性問題を肯定的に解決したらしく、間もなく学術雑誌と arXiv へ投稿されるらしい」と報じられたことがあるが、それにより、幾何解析と超局所解析の最先端分野であるテンソル・トモグラフィーという分野の存在を知った。その影響で最終年度の 2018 年度に、幾何学的トモグラフィーやテンソル・トモグラフィーに新規参入することを目指すことにして研究の準備を進めた。具体的には、専門書や最近の論文を勉強して技術の修得や情報の収集を行い、当該分野に関連する主に外国で開催されるチュートリアルコースや研究集会に可能な限り出席して情報収集を行った。最近は当該分野に関する研究集会が数学だけでなくトモグラフィー関連の応用数学や実学の研究者も交えて世界のあちこちで開催されるので競争は激しいかもしれないが、筆者のような新規参入を試みる者にとっては情報収集がしやすく、また純粋数学から応用数学にわたって幅がとても広いので研究課題を見つけやすい状況になっている。

４．研究成果

論文[4]では、特殊関数と量子化の交差点のような分野の枠組みや事実をバーグマン型の積分変換の観点で見直し、当該分野の種々の実例を統一的かつより高い視点で見ることができることを示した。特に当該分野は整関数の枠組みの話とみなされていたが、対応する実変数の世界があることを紹介できたことが最も重要である。さらに論文[2]では一般次元の複素ユークリッド空間の一般のガウス型整関数がバーグマン型変換の像として与えられるシーガル・バーグマン空間とよばれる再生核ヒルベルト空間において、その元になり、正準交換関係をみたす生成・消滅作用素をもち、完全正規直交系の生成元になるための必要十分条件を与えた。特殊関数と量子化の交差点のような分野で知られていた 1-2 次元の実例のみならず、今後当該分野で現れる実例はすべて[2]の主定理の条件をみたす実例になる。他に関連する論文１編を学術雑誌に投稿中であったが、本報告書作成中に掲載決定になり、ウェブ上で出版され紙媒体としては印刷中になっている（[1])が、この論文では複素１次元のシーガル・バーグマン型の空間に関連して、特に楕円に関連する関連する様々な研究を行い、いくつかのささやかな結果を得たが、最も期待された「楕円の特性関数によるテープリッツ作用素の固有値から楕円を決定する逆問題」の解決には至らなかった。

一方、論文[3]では、古屋貴士氏および越河匠氏とともに古典的なバーグマン変換の積分核はエルミート関数系の母関数であることに着目したエルミート展開の計算手法を開発した。先行研究では１次元の場合の直接計算であったが、バーグマン変換を経由すると多次元でも計算が整関数の原点を中心とするテイラー展開を求める計算に帰着するので、より一層簡単かつ汎用性の高い計算法を提案することができた。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計４件）

[1] <u>Hiroyuki Chihara</u>, *Bargmann-type transforms and modified harmonic oscillators*, Bulletin of the Malaysian Mathematical Science Society, pp.1-22, published online on May 6, 2019, DOI: 10.1007/s40840-019-00771-3.

[2] <u>Hiroyuki Chihara</u>, Holomorphic Hermite functions in Segal-Bargmann spaces, Complex Analysis and Operator Theory, 13 (2019)、pp.351-374.

[3] <u>Hiroyuki Chihara</u>, Takashi Furuya and Takumi Koshikawa, *Hermite expansions of some tempered distributions*, Journal of Pseudo-Differential Opererators and Applications, 9 (2018), pp.105-124.

[4] <u>Hiroyuki Chihara</u>, Holomorphic Hermite functions and ellipses, Integral Transforms and Special Functions, 28 (2017)、pp.605-615.

〔学会発表〕（計４件）

[1] <u>Hiroyuki Chihara</u>, Geometric analysis of dispersive flows, The 14th Kagoshima Seminar on Algebra、Analysis and Geometry, 鹿児島大学, 2019 年 2 月 11 日～15 日、招待講演.

[2] <u>Hiroyuki Chihara</u>, Geometric analysis of dispersive flows, Himeji Conference on Partial Differential Equations、イーグレひめじ、2018 年 2 月 21 日～22 日、招待講演.

[3] <u>千原浩之</u>、エルミート多項式とその周辺の話題、数理科学セミナー、高知大学、2016 年 9 月 27 日、招待講演.

[4] <u>千原浩之</u>、Bargmann-type transform associated with ellipses, スペクトル理論セミナー、学習院大学、2016 年 6 月 25 日、招待講演.

〔図書〕（計１件）

[1] エリアス・M・スタイン、ラミ・シャカルチ 著；新井仁之、杉本 充、髙木啓行、千原浩之 訳、「実解析」、プリンストン解析学講義 3、日本評論社、2017．

６．研究組織

(1) 研究分担者
なし

(2)研究協力者
研究協力者氏名：小野寺 栄治（高知大学）
ローマ字氏名：ONODERA，Eiji (Kochi University)