

平成 31 年 4 月 7 日現在

機関番号：15301

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2016～2018

課題番号：16K05230

研究課題名(和文) 磁場が関わる量子現象に対するスペクトル漸近解析

研究課題名(英文) Spectral asymptotic analysis for quantum phenomena related to magnetic fields

研究代表者

田村 英男 (Tamura, Hideo)

岡山大学・自然科学研究科・特命教授

研究者番号：30022734

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,500,000円

研究成果の概要(和文)：3個のソレノイド磁場が直線状に位置するの散乱系において、そのレゾナンス(散乱極)のアハラノフ・ボーム(Aharonov-Bohm)効果を追究した。磁場の中心が互いに十分離れたとき、中心間の捕捉現象によって実軸近傍に生成されるレゾナンスの位置にAB効果がいかに現れるかを解析した。結果は、その位置が単一ソレノイド磁場の後方散乱振幅に加え、中心間の距離の比によって記述されることを示した。方法は、可解モデルである単一ソレノイド磁場散乱に関する情報を活用する。また、同じ手法を4個の場合についても議論した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

量子力学の研究対象であるミクロな世界においては、古典力学の直感とは相容れない量子効果とよばれる現象が生じる。本研究課題では量子力学の根幹に関する現象のひとつであるアハラノフ・ボーム効果(AB効果)をスペクトル漸近解析を駆使して研究した。AB効果とは、量子力学に従う粒子が磁場の中を運動するとき、磁場のみならず、それを生成するベクトルポテンシャル自身も運動に関与する現象を言う。ほぼ直線上に並んだ3個のソレノイド磁場による散乱系において、左右両端の磁場間の捕捉現象から生じるレゾナンスに第三の磁場の磁束と配置が関係することを示し、AB効果の实在を数学的に立証した。

研究成果の概要(英文)：We study the Aharonov-Bohm effect (the AB effect) in quantum resonances for scattering by three solenoids in two dimensions under the situation that the centers of the solenoids are placed almost in line. The resonances are shown to be generated near the real axis by the trapping trajectories when the centers are largely separated from one another. We analyze how the AB effect is reflected in the location of these resonances. The results are described by use of the backward scattering amplitude by one solenoid and depend on the ratio of the distances between the solenoids as well as on the magnetic fluxes. The method makes a full use of the information from the scattering system by one solenoid, which is known to be exactly solvable in quantum mechanics. We also discuss the case of four solenoids.

研究分野：数学解析

キーワード：スペクトル理論 シュレディンガー作用素 磁場散乱 レゾナンス アハラノフ・ボーム効果 2次元
エフィモフ効果 3体フェルミ系

様式 C-19、F-19-1、Z-19、CK-19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

申請者は、40 年余年間に渡り、量子力学の基礎方程式であるシュレディンガー方程式に対するスペクトル理論と散乱問題の数学解析の研究に従事してきた。とくに、固有値および散乱現象に現れる種々の物理量の漸近性 (spectral asymptotics) を主要な研究課題としてきた。例を挙げれば、プランク定数 h に相当する微小媒介変数の極限 ($h \rightarrow 0$) をとることによって古典力学との関係をみる準古典近似問題、高エネルギーおよび低エネルギー領域での固有値の漸近分布 (Weyl 公式とよばれる) あるいは古典粒子の捕捉現象によって実軸近傍に生成されるレゾナンスの分布などが中核を占める課題である。

スペクトル理論においては、偏微分方程式論、作用素論、数理物理からの問題意識が交錯し、その研究方法も多岐にわたっている。得られた研究成果は、ラプラス作用素のスペクトル理論を介して、確率論、微分幾何学、整数論などの諸分野と多くの接点を有し、数学のひとつの大きな研究分野を形成している。欧米の研究所ではスペクトル理論関連のワークショップが毎年開催され、活発な研究活動が展開されている：

URL: <https://spectraltheory.wordpress.com/conference-on-spectral-theory>

2017 年度には、日本でも、加藤敏夫教授の生誕 100 年記念の一連の国際研究集会が開催された。加藤教授をはじめとして、この分野の進展に貢献してきた日本人研究者も少なくないが、近年は高齢化が進み、後進の育成が停滞しているのは残念である。

2. 研究の目的

量子力学が提供する数学の問題は広く深くそして豊かである。その研究対象であるミクロな物理現象において、古典力学的な視点から説明できない注目すべき現象がしばしば生じる。このような自然現象は量子効果とよばれ、ひとつひとつが数学解析の格好の題材を提供している。

本研究課題では、次の 2 つの量子効果に焦点を絞り、スペクトル漸近解析の手法を駆使し、これらの量子現象の背後に潜む数理を研究した。とくに、磁場に関わる量子現象の数理はスペクトル理論の最近の重要な研究テーマのひとつとなっている。

(1) アハラノフ・ボーム (Aharonov-Bohm) 効果：量子力学に従う粒子が磁場の中を運動するとき、磁場のみならず、それを生成するベクトルポテンシャル自身もその運動に関与する。量子力学の根幹に関するこの現象は、アハラノフ・ボーム効果、通称 AB 効果とよばれている。3 個のほぼ直線上に並んだソレノイド磁場 (デルタ型磁場) による散乱系に対して、実軸近傍に生成されるレゾナンス (散乱極) の分布に AB 効果がいかに関与するかを解析する。この散乱系は、粒子が有する波動性と粒子性がともに顕在する簡単なモデルである。波動性は、磁場を生成するベクトルポテンシャルによる AB 効果を通して波動関数の位相変化に現れ、一方、粒子性は、捕捉現象によって記述される。ソレノイド磁場が直線上に配置されることは、AB 効果が最も強く現れる配置であり、障害物による波動散乱における所謂 Ikawa (井川) 条件が満たされていないモデルでもある。

(2) エフィモフ (Efimov) 効果：エフィモフ効果は、3 体系シュレディンガー作用素のスペクトル理論において最も特筆すべき性質のひとつである。粗く言えば、2 体部分系が零エネルギーにおいてレゾナンス (共鳴状態) にあるとき、どの 2 つの粒子も負のエネルギーで束縛状態 (固有状態) を生成しないにもかかわらず、3 体系は無限個の負の固有値を有する量子現象をいう。古典力学からの直感とは相容れない、この量子現象は、空間 3 次元のみで成立し、2 次元では一般には成立しない。3 次元と 2 次元の決定的な相違は、3 次元ラプラス作用素のレゾナントの積分核は、低エネルギー領域で特異性を有しないが、2 次元作用素は特異性をもつ

ことである。しかし、磁場が生きているときには、事情が一変する。そのレゾルベントは、低エネルギー領域で特異性をもたず、3次元ラプラス作用素と類似のスペクトル構造を有する。磁場を有する2次元3体系に対して、零エネルギーレゾナンスから生まれる特異性を低エネルギー領域でのレゾルベントの漸近挙動を用いて解析し、エフィモフ効果が成り立つかどうかを数学的視点から検証を試みる。

3. 研究の方法

(1) この課題に関する下準備はほぼ完成し、初年度から論文作成に取り組んだ。前回の研究課題（「磁場散乱のレゾナンスにみるアハラノフ・ボーム効果」(2013 - 2015)）において、次の方針を提案していた：① 単一ソレノイド磁場による散乱系は可解モデルで、そのグリーン関数（レゾルベント核）は、ベッセル関数を用いて複素積分表示ができる。この積分表示に最急降下法を用いて、グリーン関数の前方方向に沿った特異な漸近挙動を詳細に解析し、AB効果に起因する位相変化はみるための漸近公式を確立する。② 複数個のソレノイド磁場による散乱系のグリーン関数は、単一磁場のグリーン関数から構成する。磁場の中心間で生じる捕捉現象は、数学的には単一磁場のグリーン関数の反復積分として表現されるが、下半平面にスペクトル（エネルギー）変数を有するグリーン関数は、無限遠で指数的に増大し、その反復積分は一般には発散する。この難点は、実数変数を複素変数に変数変換（complex scaling method）し、指数増大を指数減衰に変化させることによって克服できる。その技法は、2個のソレノイド磁場の場合にすでに実行した。上記の手法を3個の場合に適用した。

(2) 磁場を有する3体系のエフィモフ効果の問題は、幾分挑戦的な課題であった。下準備として、磁場を有する2体系作用素が、零エネルギーにおいてレゾナンスをもつとき、そのレゾルベントの低エネルギー領域での特異性の漸近解析は完了していたが、その結果を3体系レゾルベントの解析につなげるためには、十分な見通しがたっていなかった。3次元のアナロジーの踏襲として、Faddeev方程式の手法を試みたが、幾多の克服すべき難点が残し、満足すべき結果には至らなかった。しかし、副産物として、2次元空間でのエフィモフ効果に関する物理系学術論文に遭遇し、新しい研究課題を見出すことができた。

個人で行う理論研究のため、同じ分野の研究者と課題について討論を深め、最新の研究成果について情報を収集することが研究目的を達成するために不可欠である。そのような活動の場として次のセミナー、研究集会を活用し、その参加経費に科学研究費は使用された：

- ・作用素作用論セミナー（数理解析研究所）
- ・スペクトル理論セミナー（学習院大学）
- ・夏の作用素論シンポジウム
- ・研究集会「数理解析と微分方程式」
- ・研究集会「超局所解析と古典解析」

その他に、科学研究費が関わる研究活動として、数理解析研究所の研究集会「スペクトル・散乱理論とその周辺」（加藤教授生誕100年研究事業の一環として開催）の講演者として、フランスから2名の外国人研究者（X.P. Wang (Nantes), J. Royer (Toulouse)) を招聘するとともに、最近のスペクトル理論のわだいについて研究交流を深めた。

4. 研究成果

(1) ほぼ直線上に配置された3個のソレノイド磁場による散乱系において、左右両端の磁場間で生じる捕捉現象によって実軸近傍にレゾナンスが生成されることを立証した。その分布が両端の磁場による後方散乱振幅に加え、間に位置する第三のソレノイドの磁束およびその配置

によって決まることを明らかにした。これは、磁場散乱のレゾナンス問題において、AB 効果が実際に深く関与することを数学的立証した最初の結果である。さらに、4 個のソレノイド磁場の場合に拡張した。これらの結果は、雑誌論文 ③ において公表した。

(2) 当初の目的は、磁場を有する 2 次元 3 体系について、エフィモフ効果が生じるかどうかを数学的視点から検証することにあったが、期待した結果に残念ながら至らなかった。

その代わりに、2 次元空間でのエフィモフ効果 (磁場を有しない) の数学的視点からの検証を行った。最近の物理系学術論文 ([Ref1, Ref2]) において、繰り込み群の手法を用いて 2 次元空間でもこの現象が生じる系が存在することが報じられてきた: ① 3 体フェルミ系 (波動関数が反対称性を有する) ② 3 体レゾナンスを有する 4 体系。低エネルギー領域でのレゾルベントの漸近解析を駆使し、エフィモフ効果を数学的視点から見直し立証するとともに、零に集積する負の固有値の漸近分布公式を導いた。その結果は、系 ① については、学術誌に投稿、② については論文として纏めている段階である。また、結果の一部を、数理解析研究所での研究集会やナント (Nantes) 大学の解析セミナーにおいて紹介した。

エフィモフ効果の研究は、1971 年の理論的予言に始まるが、近年の実験機器の飛躍的な精度の向上により実験によっても検証されて、理論的見地のみならず実験的見地からも注目すべき量子現象のひとつとなっている。最近では、この効果をめぐって Efimov Physics と称せられるひとつの量子物理の研究分野が形成されている。最新の関連する話題については、歴史的背景およびその進展を含めて、概説 [Ref3] において詳しく報告されている。数学的視点からの議論が今後深まることを期待したい。最近やや精彩に欠ける多体系スペクトル理論の活性化に寄与することになる。

<引用文献>

[Ref1] Y. Nishida, Semi--super Efimov effect of two-dimensional bosons at a three-body resonance, Phys. Rev. Lett., 118 (2017)

[Ref2] Y. Nishida, S. Moroz and D. T. Dan, Super Efimov effect of resonantly interacting fermions in two dimensions, Phys. Rev. Lett., 110 (2013)

[Ref3] P. Naidon and S. Endo, Efimov Physics: a review, arXiv:1610.09805v1.

5. 主な発表論文等

[雑誌論文] (計 3 件)

- ① H. Tamura, Aharonov-Bohm effect in resonances for scattering by three solenoids at large separation, Appl. Math. Res. Express, 2017 (1), 65-117 (査読有)
DOI: <https://10.1093/amrx/abw009>
- ② H. Tamura, Aharonov-Bohm effect in resonances of magnetic Schrödinger operators in two dimensions II, Mathematical Journal of Okayama Univ., 58 (2016), 41-78 (査読有)
URL(<http://www.math.okayama-u.ac.jp/mjou>)
- ③ H. Tamura, Aharonov-Bohm effect in resonances of magnetic Schrödinger operators in two dimensions III, Mathematical Journal of Okayama Univ., 58 (2016), 79-108 (査読有) URL(<http://www.math.okayama-u.ac.jp/mjou>)

[学会発表] (計 8 件)

- ① H. Tamura, Efimov effect for few-body systems: asymptotic distribution of negative eigenvalues, Analysis Seminar, Nantes (France) University, 10/04 (2018)

- ② 田村 英男, 2次元空間におけるエフィモフ効果について, 学習院大学スペクトル理論セミナー, 01/13 (2018)
- ③ H. Tamura, Efimov effect in two dimensions: asymptotic distribution of negative eigenvalues, RIMS Workshop on spectral, scattering theory and related topics, 12/08 (2017)
- ④ 田村 英男, 2次元空間でのエフィモフ量子効果について, 夏の作用素論シンポジウム(伊勢市), 07/16 (2017)
- ⑤ 田村 英男, 2次元空間での Efimov 量子効果, 京都大学作用素論セミナー, 06/30 (2017)
- ⑥ 田村 英男, 3体系の Efimov 効果と Thomas 効果, 第27回数理解物理と微分方程式(富山市), 11/27 (2016)
- ⑦ 田村 英男, 2次元3体系の super Efimov 効果, 夏の作用素論シンポジウム(米子市), 09/03 (2016)
- ⑧ 田村 英男, 2次元3体フェルミ粒子系の super Efimov 効果について, 京都大学作用素論セミナー, 06/17 (2016)

6. 研究組織

(1)研究分担者

研究分担者氏名: 岩塚 明 (期間は2016年度と2017年度)

ローマ字氏名: Iwatsuka Akira

所属研究機関名: 京都工芸繊維大学

部局名: 基盤科学系

職名: 教授

研究者番号(8桁): 40184890

研究分担者氏名: 笥 知之

ローマ字氏名: Kakehi Tomoyuki

所属研究機関名: 岡山大学(2016)/筑波大学(2017,2018)

部局名: 自然科学研究科(2016)/数理物質系(2017,2018)

職名: 教授

研究者番号(8桁): 70231248

(2)研究協力者

研究協力者氏名: 谷島 賢二

ローマ字氏名: Yajima Kenji

研究協力者氏名: 中村 周

ローマ字氏名: Nakamura Shu

研究協力者氏名: 峯 拓矢

ローマ字氏名: Mine Takuya