

令和 3 年 5 月 13 日現在

機関番号：13101

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2016～2020

課題番号：16K05250

研究課題名（和文）閉曲面上のグラフの極大1-交差埋め込みに関する研究

研究課題名（英文）Maximal 1-embeddings on closed surfaces

研究代表者

鈴木 有祐（Suzuki, Yusuke）

新潟大学・自然科学系・准教授

研究者番号：10390402

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,600,000円

研究成果の概要（和文）：球面やトーラスに代表される閉曲面 F 上に各辺高々1回のみ交差を許して描画可能なグラフを F に1-交差埋め込み可能であるという。与えられたグラフが1-平面的（球面に1-交差埋め込み可能）であるかどうかの判定はNP-完全問題であることが知られており、（平面グラフと比較した際）これらのグラフの扱いは一般的には難しいものとされている。これらのグラフに“極大”という条件を付し、その1-交差埋め込みの方法そのものから議論を行う事で、完全多部グラフに関する問題、グラフマイナーに関する問題、辺数の上界に関する問題等に解答を与えることに成功した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

平面グラフが4色で彩色可能であるという事実は「4-色問題」として広く知られている。この問題に代表されるように、閉曲面上に辺の交差なく埋め込まれたグラフに関する研究は数多く行われており、特に上記のグラフの彩色問題などは携帯電話の周波数割り当てなどに応用されている。一方、“平面グラフを少しだけ超えたグラフ”に関する研究は、まさに現在進行形で多くの研究者により成果が積み出されている状況である。我々の行った「極大1-交差埋め込みに関する研究」の成果は定義そのものから丁寧に議論する必要がある基礎的なものも含んでおり、今後、当該分野及び関連のある計算機科学分野の発展に寄与することは間違いない。

研究成果の概要（英文）：A graph is said to be 1-embeddable on a closed surface F , e.g., the sphere or the torus, if the graph can be drawn on F so that each edge crosses at most one other edge at a point. In particular, in contrast to planarity testing, testing 1-planarity of a given graph is an NP-complete problem, and it is thought that to deal with these graphs is generally not easy. In this research, we discuss “maximal” 1-embeddings on closed surfaces, which are relatively easier to treat when compared to general 1-embeddings. We could prove some statement of the maximal or optimal 1-embeddings on closed surfaces, especially, related to complete multipartite graphs, graph minor, the upper bound of the number of edges.

研究分野：位相幾何学的グラフ理論

キーワード：グラフ 1-交差埋め込み 四角形分割 マイナー 完全多部グラフ 有向グラフ

1. 研究開始当初の背景

平面グラフが4彩色可能であるという事実は**四色定理**として非常によく知られているが、その面にも同時に色を与え、色の塗り分けを行おうとするとどのようなことが起こるであろうか？このような素朴な疑問に端を発し、1965年、Ringelによって**1-平面グラフ**（平面上の1-交差埋め込みの概念が創出された。1984年、Borodinにより任意の1-平面グラフが6彩色可能であることが証明されこの問題は解決されたが、このグラフのクラスが本格的に注目され始めたのは、GrigorievとBodlaender (2007)により、「1-平面性の判定問題はNP-完全のクラスに属する」という事実が示されてからである。（平面性の判定に関しては、Tarjanの線形時間アルゴリズムが有名である。）上の結果は「与えられたグラフが1-平面的であるという性質が辺の縮約に関して必ずしも保存されない」という事実と深く関係しており、このグラフが従来のグラフ理論において強力な武器であったグラフ・マイナー理論（有限の極小グラフを使い全体の構造を把握する）を用いて扱いづらいクラスであることを示唆している。研究代表者は2009年頃から継続して1-交差埋め込みの研究を行っており、特に、従来の位相幾何学的グラフ理論（辺の交差無し）との大きな違いの現れる現象・結果に興味を持ち研究を継続してきた。（2012年には1-平面グラフの“再埋蔵理論”に関する研究成果を日本数学会・分科会特別講演で発表した。）また上述のように、1-平面グラフは計算機科学分野でも注目されており、近年関連する多くの論文が出版されている。

2. 研究の目的

各辺、他の辺と高々1回のみの交差を許し、閉曲面 F^2 上に描画されたグラフを F^2 上の**1-交差埋め込み**と呼ぶ。“位相幾何学的グラフ理論”においては、通常、閉曲面上に辺の交差なく埋め込まれたグラフが研究対象となるが、これらはグラフ・マイナー理論と非常に相性が良く、従来の研究はこの手法に依存するものがほとんどである。ところが、“埋め込み”の条件を多少緩和しただけの1-交差埋め込みは「マイナー操作に関してその性質を保存しない」ことが知られており、そのコントロール方法はいまだに未知な部分が多い。本研究では、特に“辺極大”な1-交差埋め込みに焦点を当て、グラフ・マイナー理論が成立する世界との境界に位置するグラフの構造を明らかにするべく研究を遂行した。

3. 研究の方法

n 頂点平面グラフの辺数の上界は $3n-6$ であり、辺極大（以下、単に極大）なものには必ず $3n-6$ 本の辺をもつ。（極大平面グラフまたは平面の三角形分割。）同様に n 頂点1-平面グラフの辺数が $4n-8$ 以下であることも知られているが、極大な1-平面グラフの辺数が必ずこの上限を満たすとは限らない。（それを満たすグラフを**最適1-平面グラフ**とよぶ。）研究代表者は、以前、辺数が三角形分割のそれより真に小さい極大1-平面グラフの存在を示したが（オーストラリアのEades教授等との共同研究）、これらは非常に扱いづらいグラフであると考えられる。1-平面グラフを扱う問題に対して「平面グラフと同様の手法でコントロール可能か？」という着眼点をもつことは自然だが、“極大”という条件を付しただけでは、依然“難しい”と言わざるを得ない。まずは上記の“難しさ”を正しく理解するために、既存の研究結果を体系的にまとめ、同一の概念であるが異なる言葉で記述されているような命題を整理するところから研究を開始した。その後、基礎的な辺数の上界を与えることや、比較的扱いやすいと思われる最適1-平面グラフに焦点を当て研究を遂行した。特に、最適1-交差埋め込みに関しては、閉曲面上の四角形分割と深い関連があり、既存の（四角形分割に関する）結果がどこまで本研究に応用可能かということを確認しながら問題解決を行った。

4. 研究成果

得られた主な結果は以下の5つである。

(1) 「Beyond planar graphs」の執筆

海外の研究者（Seok-Hee Hong, Tóth, Csaba D等）と共に「Beyond Planarity」という題名の本の執筆を行った。平面グラフに対する既存の結果を様々な視点から拡張させた話題を集めたものであり、研究代表者は「1-planar graph」という章を担当した。そこでは、既存の結果及び自身の研究成果を紹介するとともに、新たな命題を証明と共に複数書き加えている。その過程で、これまでの研究（「平面」に限定した部分）を見直し次なる課題を見つけることもできた。また、他の研究者の書いた別の章を査読した際、平面グラフをわずかに超える様々なグラフのクラスに関する新たな知見を得ることもできている。

(2) 完全グラフをマイナーにもつ最適1-交差埋め込みの研究

最適1-平面グラフが7頂点完全グラフ K_7 をマイナーに持たないための特徴付けを与えた論文「 K_7 -minors in optimal 1-planar graphs」が、離散数学の専門誌であるDiscrete

Mathematicsに掲載された。その過程で論文の査読者から「単純ではない最適1-平面グラフに対して同様の結果が得られるのか？」という質問を受けた。(最適1-平面グラフは3-連結四角形分割の各面に交差辺を加えたものと理解できるが、上記のグラフのクラスは、この“3-連結”という条件を排除したものになっている。)そこで、当時、研究室に所属する大学院生であった曾根氏と共にこの研究に着手し、完全グラフ K_n ($n \leq 7$)をマイナーに持つ多重最適1-平面グラフを完全に特徴づけることができた。グラフが単純である場合は(最適1-交差埋め込みは)必ず K_6 -マイナーをもつことが知られているが、多重グラフにまでグラフのクラスを広げてしまうとその限りではなく、いくらか新たな操作を導入して議論を行う必要があった。また、その結果を一部利用し、射影平面上の単純最適1-交差埋め込みで K_7 -マイナーをもたないものの特徴付けを得た。この結果の系として「系 射影平面上の任意の最適1-交差埋め込みで5-連結(もしくはその四角形部分グラフが面幅4以上)であるものは K_7 -マイナーをもつ」という事実を示すこともできている。

(3) 閉曲面上に1-交差埋め込み可能な完全多部グラフの研究

「完全多部グラフが射影平面上に1-交差埋め込み可能か？」という問題に対して完全な解答を与えることに成功した。元となる平面の定理(Czap and Hudak, 2012)では、既存の結果(グラフの交差数等)を多数用いた証明が行われていたが、射影平面上のグラフに対してはそのような事実が乏しいためかなり基礎的なところから理論を構築する必要があった。その過程において「1-交差埋め込み可能な完全3部グラフの辺数の上限」を得ることに成功している。上記の成果を2018年5月に行われる国際会議(JCCA2018)等で発表した。また、トーラス上に1-交差埋め込み可能な完全多部グラフに関する研究も進展しており、現在、 $K_{4,3,3}$ が所望の描画をもつのかどうか完全解決の鍵であるところまでわかってきている。上記の結果は研究室に所属していた大学院生渋谷ひかり氏との共同研究である。

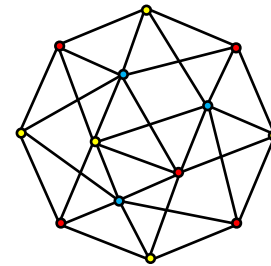


図1 射影平面上の $K_{3,3,3}$

(4) グラフの辞書式積の1-平面性に関する研究

慶應大学の松本氏と共に「グラフの積の1-平面性」に関する研究を行った。そのモチベーションとなる論文(Bucko and Czap, 2015)では“(グラフの)辞書式積”に関する議論が行われており、与えられたグラフと長さが1の道の辞書式積の1-平面性に関する予想が掲げられていた。この予想を解決することを目標に研究を始め、“Key walk”と呼ばれる特徴的な構造に着目し以下の定理を証明することに成功した。

「定理 G と長さ1の道との辞書式積が1-平面的であるための必要十分条件は G がcactusであることである。(cactusは連結で任意の辺が高々1個の閉路に含まれているようなグラフ。)」

上記の結果を2019年9月にスロバキアで行われた研究集会等で発表している。また、この内容をまとめた論文は専門誌であるDiscusiones Mathematicae Graph Theoryに掲載が決定している。

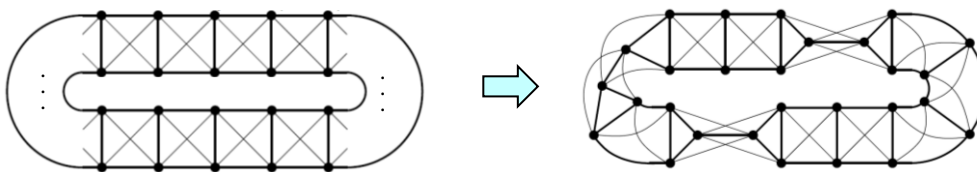


図2 Key walkの再埋蔵

(5) 有向グラフの1-平面性に関する研究

東京理科大学の川谷氏との共同研究では、オイリアン有向グラフの1-平面性に関する議論を行い、その中でも“良い”描画をもつための特徴付けを得ることができた。その際、描画されたグラフから得られるある平面グラフ(planarizationと呼ばれる)のradial graph(右の図内の緑色のグラフ)という構造に着目し、問題の解決に成功した。この結果を2019年6月にスロベニアで行われた研究集会等で発表している。また、この内容をまとめた論文は専門誌であるGraphs and Combinatoricsに掲載されている。

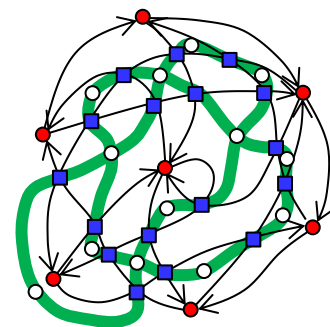


図3 planarizationと“良い”向き付け

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計9件（うち査読付論文 9件 / うち国際共著 1件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Kawatani Gen, Suzuki Yusuke	4. 巻 36
2. 論文標題 Partially Broken Orientations of Eulerian Plane Graphs	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Graphs and Combinatorics	6. 最初と最後の頁 767 ~ 777
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00373-020-02152-1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Suzuki Yusuke	4. 巻 17
2. 論文標題 Generating polyhedral quadrangulations of the projective plane	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Ars Mathematica Contemporanea	6. 最初と最後の頁 153 ~ 183
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.26493/1855-3974.1195.c71	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Klee Steven, Murai Satoshi, Suzuki Yusuke	4. 巻 35
2. 論文標題 Exceptional Balanced Triangulations on Surfaces	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Graphs and Combinatorics	6. 最初と最後の頁 1361 ~ 1373
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00373-018-2001-x	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Nagasawa Taku, Noguchi Kenta, Suzuki Yusuke	4. 巻 19
2. 論文標題 Optimal 1-embedded graphs which triangulate other surfaces	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Journal of Nonlinear and Convex Analysis	6. 最初と最後の頁 1759 ~ 1770
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Fujisawa Jun, Segawa Keita, Suzuki Yusuke	4. 巻 34
2. 論文標題 The Matching Extendability of Optimal 1-Planar Graphs	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Graphs and Combinatorics	6. 最初と最後の頁 1089 ~ 1099
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00373-018-1932-6	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Nagasawa Taku, Noguchi Kenta, Suzuki Yusuke	4. 巻 89
2. 論文標題 No optimal 1-planar graph triangulates any nonorientable closed surface	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Journal of Graph Theory	6. 最初と最後の頁 350 ~ 360
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1002/jgt.22255	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Murai Satoshi, Suzuki Yusuke	4. 巻 146
2. 論文標題 Balanced subdivisions and flips on surfaces	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Proceedings of the American Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 939 ~ 951
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1090/proc/13775	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Nishina Makoto, Suzuki Yusuke	4. 巻 340
2. 論文標題 A generating theorem of simple even triangulations with a finitizable set of reductions	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Discrete Mathematics	6. 最初と最後の頁 2604 ~ 2613
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.disc.2017.06.018	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Yusuke Suzuki	4. 巻 340
2. 論文標題 K ₇ -Minors in optimal 1-planar graphs	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Discrete Mathematics	6. 最初と最後の頁 1227-1234
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.disc.2017.01.022	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計27件 (うち招待講演 1件 / うち国際学会 11件)

1. 発表者名 鈴木有祐
2. 発表標題 二部グラフ的及び三部グラフ的1-交差埋め込みの辺数の上界について
3. 学会等名 日本数学会年会, 慶應大学 (オンラインによる講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 鈴木有祐
2. 発表標題 二部グラフ的及び三部グラフ的1-交差埋め込みの辺数の上界について
3. 学会等名 第32回位相幾何学的グラフ理論研究集会, 横浜国立大学 (オンラインによる講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Yusuke Suzuki
2. 発表標題 Orientations of Eulerian graphs on the plane
3. 学会等名 YNU-PSU Joint Mathematical Seminar 2020 (Thailand) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Yusuke Suzuki
2. 発表標題 Non-1-planarity of lexicographic products of graphs
3. 学会等名 28th Workshop Cycle and Colorings (Slovakia) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Yusuke Suzuki
2. 発表標題 8th Slovenian International Conference on Graph Theory (Slovenia)
3. 学会等名 8th Slovenian International Conference on Graph Theory (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 鈴木 有祐
2. 発表標題 グラフの辞書式積の非1-平面性について
3. 学会等名 第31回位相幾何学的グラフ理論研究集会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 鈴木 有祐
2. 発表標題 グラフの辞書式積の非1-平面性について
3. 学会等名 日本数学秋季総合分科会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 曾根 克哉
2. 発表標題 射影平面上の K_7 -マイナーをもたない最適1-交差埋め込みの特徴づけ
3. 学会等名 第31回位相幾何学的グラフ理論研究集会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Yusuke Suzuki
2. 発表標題 Partially broken orientations of Eulerian plane graphs
3. 学会等名 6th Pacific Workshop on Discrete Mathematics (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Yusuke Suzuki
2. 発表標題 Partially broken orientations of Eulerian plane graphs
3. 学会等名 30th Workshop on topological graph theory (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Yusuke Suzuki
2. 発表標題 Exceptional balanced triangulations on surfaces
3. 学会等名 The Japanese Conference on Combinatorics and its Applications (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 鈴木 有祐
2. 発表標題 Partially broken orientations of Eulerian plane graphs
3. 学会等名 日本数学会年会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Hikari Shibuya
2. 発表標題 1-Embeddability of complete multipartite graphs on the projective plane
3. 学会等名 Japanese Conference on Combinatorics and its Applications (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Jun Hasegawa
2. 発表標題 \mathbb{Q}_4 -irreducible even triangulations of the projective plane
3. 学会等名 Japanese Conference on Combinatorics and its Applications (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 渋谷ひかり
2. 発表標題 射影平面とトーラスに1-交差埋め込み可能な完全多部グラフについて
3. 学会等名 第15回組合せ論若手研究集会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 長谷川純
2. 発表標題 射影平面の Q_4 -既約偶三角形分割と (P, Q) -既約偶三角形分割の部分構造
3. 学会等名 第15回組合せ論若手研究集会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 曾根克哉
2. 発表標題 K_n -マイナーをもたないmulti-01PGの特徴づけについて
3. 学会等名 第15回組合せ論若手研究集会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Yusuke Suzuki
2. 発表標題 Balanced subdivisions and flips on surfaces
3. 学会等名 The Seventh Workshop Graph Embeddings and Maps on Surfaces (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 鈴木 有祐
2. 発表標題 例外的3-染色的三角形分割について
3. 学会等名 日本数学会年会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 鈴木 有祐
2. 発表標題 例外的3-染色的三角形分割について
3. 学会等名 第29回位相幾何学的グラフ理論研究集会
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 鈴木 有祐
2. 発表標題 Balanced subdivisions and flips on surfaces
3. 学会等名 離散数学とその応用研究集会2017
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 鈴木 有祐
2. 発表標題 K ₆ -Minors in triangulations on the nonorientable surface of genus 4
3. 学会等名 位相幾何学的グラフ理論セミナー
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 鈴木 有祐
2. 発表標題 再埋蔵的視点から見たグラフの1-交差埋め込み
3. 学会等名 日本オペレーションズ・リサーチ学会 最適化の基盤とフロンティア研究部会 第8回研究会(招待講演)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Yusuke Suzuki
2. 発表標題 A generating theorem of simple even triangulations with a finitizable set of reductions
3. 学会等名 International Workshop on Combinatorial and Computational Aspects of Optimization, Topology and Algebra (ACCOTA 2016) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Yusuke Suzuki
2. 発表標題 Optimal 1-embedded graphs which triangulate other surfaces
3. 学会等名 The Fifth Asian Conference on Nonlinear Analysis and Optimization (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 鈴木 有祐
2. 発表標題 3-染色的三角形分割に対する変形操作について
3. 学会等名 第28回位相幾何学的グラフ理論研究集会
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 鈴木 有祐
2. 発表標題 3-染色的三角形分割に対する変形操作について
3. 学会等名 離散数学とその応用研究集会2016
4. 発表年 2016年

〔図書〕 計1件

1. 著者名 Seok-Hee Hong, Takeshi Tokuyama, Yusuke Suzuki, et al.	4. 発行年 2020年
2. 出版社 Springer Singapore	5. 総ページ数 270
3. 書名 Beyond Planar Graphs	

〔産業財産権〕

〔その他〕

YUSUKE SUZUKI (鈴木 有祐) http://mathweb.sc.niigata-u.ac.jp/~y-suzuki/
--

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
オーストラリア	The University of Sydney			
米国	California State University Northridge			