様　式　C－19、F－19－1、Z－19　(共通)

科学研究費助成事業　研究成果報告書

令和　3 年　6 月　4 日現在

機関番号：１３９０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2016～2020
課題番号：１６Ｋ０５３１８

研究課題名（和文）ソリトン理論の非可換化・高次元化と弦理論・可積分系への応用

研究課題名（英文）Extension of soliton theory to noncommutative spaces and higher-dimension with application to string theory and integrable systems

研究代表者

濱中　真志（Hamanaka, Masashi）

名古屋大学・多元数理科学研究科・講師

研究者番号：７０３７７９７７

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　3,400,000円

研究成果の概要（和文）：Quasideterminantと呼ばれるある種の非可換行列式を要に，非可換空間上のソリトン方程式の持つ数理構造の解明，解の構成・解析，および弦理論・可積分系への応用を推し進めた．特に4次元反自己双対ヤン・ミルズ方程式を代表とする高次元可積分系とKP，KdV方程式を代表とする低次元可積分系との関連について詳しく調べ，佐藤理論の高次元化やN=2弦理論への応用を議論した．QuasiWronskianで書ける多重ソリトン解を構成したのは重要な知見であり，タウ関数の理論構築への可能性，N=2弦理論における新しい交差ブレーンの存在の予言，現象論・宇宙論への新しい応用を示唆している．

研究成果の学術的意義や社会的意義
4次元反自己双対ヤン・ミルズ方程式は素粒子論・数学において極めて重要な方程式であるが，その新しいタイプのソリトン解が見出されたのは重要な成果である．不定値計量での解はただちにN=2弦理論に応用でき，未知のブレーン配位が予言されている．ユークリッド計量，ミンコフスキー計量でのユニタリな解が構成されれば，ダークマターの起源といった素粒子現象論・宇宙論の長年の問題に解答を与える可能性がある．数学的観点においても，このロンスキアン解からタウ関数の理論の存在が示唆されており，佐藤理論の高次元化という40年来の問題の解決につながるかもしれない．

研究成果の概要（英文）：We studied various aspects of noncommutative soliton equations in terms of quasideterminants with application to string theory and integrable systems. In particular, we discuss relationship between higher-dimensional integrable systems such as four-dimensional anti-self-dual Yang-Mills (ASDYM) equations and lower-dimensional integrable systems such as KP, KdV equations. It is important to find multi-soliton solutions of the ASDYM equation in terms of quasi-Wronskian. This suggests possibility of theory of tau-functions, existence of new intersecting branes, and new application to phenomenology and cosmology.

研究分野：素粒子論、数理物理学

キーワード：ソリトン　インスタントン　反自己双対ヤン・ミルズ方程式　非可換幾何　高次元ゲージ理論　素粒子論　弦理論　可積分系

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９（共通）

１．研究開始当初の背景

ソリトン理論の非可換空間への拡張は，単なる一般化ではなく，物理としても数理物理としても非常に面白いものを含んでいる．特に，非可換空間上のゲージ場の理論は，背景フラックス中のゲージ場の理論と等価であり，量子ホール効果の分野などで古くから様々な応用がなされてきた．さらに非可換空間では特異点の解消が一般に起こり，新しい物理的対象が現れる．弦理論のある状況では非可換ソリトンは D ブレーン(弦理論のソリトン)そのものに対応し，D ブレーンの解析が非可換ソリトンの解析から行われる．ここで非可換ソリトンは取り扱いが非常に容易になることがあり，Sen の予想といった D ブレーン力学の重要な問題に対しても，さまざまな応用がなされ，成功をおさめた．この流れを受け，ゲージ理論以外のソリトン方程式(KdV 方程式など)の非可換化の研究も活発になった．特に 2006 年に応募者により，「これらの方程式の大半は，4 次元ゲージ理論の反自己双対ヤン・ミルズ(Anti-Self-Dual Yang-Mills (ASDYM))方程式から次元還元などにより得られる(非可換 Ward 予想)」ことが明らかにされ，対応する物理系への応用の可能性が開かれた．また応募者達の国際共同研究により，非可換 ASDYM 方程式の解を解にうつす変換(ベックルント変換)が見出され，非可換インスタントンだけでなく(作用無限大の)新しい解も具体的に生成された．これらの解は quasideterminant と呼ばれるある種の非可換行列式で簡明に記述されるが，この事実は低次元の非可換可積分方程式についても言えることが知られており，可積分系の持つ(次元によらない)普遍的な構造の存在を示唆している．特にこの非可換行列式を用いることですべての証明が可換な場合よりはるかに簡明になることは特筆に値する．「非可換でも通用する理論体系こそが本質を捉えた自然な枠組みである」という知見は「一般化すれば解ける(本質的な定理に余分な条件はいらない)」という現代数学の哲学と合致しているように思える．物理の観点からも，背景磁場が完全にゼロという状況は局所的には存在せず，場の理論の計算がクラスター分解原理の元行われていることを考慮すると非可換空間上のゲージ理論を考えることは決して不自然なことではないと思われる．
ASDYM 方程式の解にはインスタントンと呼ばれる特別なクラスがあり，場の量子論の非摂動論的性質の理解に不可欠である．ADHM 構成法とはインスタントン解のモジュライ空間と ADHM データのモジュライ空間との 1 対 1 対応(双対性) を基にしたものであり，この双対性が保証されて，原理的にすべての解が構成され，インスタントン・バックグラウンドでの経路積分の計算が実行可能となる．特に N = 2 超対称 Yang-Mills 理論における分配関数(Nekrasov 分配関数) の厳密計算において局所化の手法を用いる際，特異点を解消するため非可換インスタントンを導入するが，非可換の設定での上記双対性は厳密に証明されてはいなかった．

２．研究の目的

本研究では，quasideterminant と呼ばれるある種の非可換行列式を要に，非可換空間上のソリトン方程式の持つ数理構造の解明，解の構成・解析，および弦理論・可積分系への応用を推し進める．特に 4 次元反自己双対ヤン・ミルズ方程式を代表とする高次元可積分系と KP, KdV 方程式を代表とする低次元可積分系との関連について詳しく調べ，佐藤理論の高次元化や N=2 弦理論への応用を議論する．素粒子論的視点からラグランジュ形式での可積分系の新しい定式化にも着手し，ネーター定理からの保存量の存在証明，量子可積分系のアノマリー研究，また非可換変形での無限次元の対称性の解明などを目指す．非可換インスタントンの研究や高次元ブラックホールの解構成にも取り組み，さまざまな応用を展開する．

具体的な研究目標は以下の通りである．

(i) ASDYM 方程式が記述する弦理論の状況は，ユークリッド計量の場合はタイプ II 弦理論の DpD(p+4)ブレーン系の低エネルギー有効理論，不定値計量(＋＋－－)の場合は N=2 弦理論の標的空間上の弦の場の理論の有効理論(世界面の超対称性が通常の 2 倍ある理論で標的空間は４次元)である．先述の Ward 予想の文脈では，計量は後者であり，KdV 方程式は N=2 弦理論のなんらかの古典的配位を記述していると考えられており，この文脈での非可換ソリトンの弦理論への応用も期待される．本研究では非可換 ASDYM 方程式を運動方程式に持つような N=2 弦理論の有効作用を具体的に記述し，非可換 ASDYM 方程式の厳密解の具体的構成と弦理論的解釈および弦理論への応用を推し進める．またこれと関連して，ラグランジュ形式での可積分系の新しい定式化にも着手し，ネーター定理からの保存量の存在証明，量子可積分系のアノマリー研究，また非可換変形された無限次元の対称性の解明などを目指す．
これと並行して，Quasideterminant に備わる恒等式(非可換プリュッカーなど) のソリトン理論における役割を解明し，双線形関係式・タウ関数に相当するものを見出す．また変形グラスマン多様体といった幾何学的解釈を与え，低次元ソリトン理論(佐藤理論)の再定式化を行う．この成果を ASDYM 方程式の厳密解や双線形化の記述と見比べて，高次元可積分系と低次元可積分系

との統一的記述を探る．佐藤理論の高次元化が可能であれば，ASDYM 方程式の解空間の対称性を解明する．非可換の設定でうまく行かないときは，まず可換極限をとった状況で手がかりを得る．

(ii) ADHM 構成法の礎となる双対性の証明を非可換空間上で完結する．非可換空間上のゲージ理論の記述には，スター積を用いる方法とオペレータ形式による記述がある．前者は，物理的・幾何学的意味は比較的分かりやすいが，非可換パラメータに関する収束性の取り扱いが難しく現時点では形式的べき級数の議論のみがなされている．一方，後者は非可換パラメータの任意の値に対して議論を展開できる．本研究では Fock 表現の具体的表示をとり，正則化の方法を定めてオペレータ形式での ADHM 構成法を完全に理解する．モノポール・ヒッチン系への応用，高次元化，経路積分への応用なども議論する．

(iii) さらなる応用を展開する．例えば非可換ベックルント変換の成果を Non-abelian の意味の非可換化として適用し，(5～10 次元の)高次元ブラックホール解を構成する．また，ラグランジュ形式から出発した可積分系の再定式化，分類を行う．無限個の保存量の存在は場の理論における可積分系の特徴の一つであるが，これに対応する無限次元の対称性をラグランジアンを不変に保つ連続変換と適切な記述を与えるラグランジアン見出す．次いで量子化によりアノマリーが生じるかどうかについて典型的なソリトン方程式に関して議論し，幾何学的障害を具体的に明らかにする．

３．研究の方法

(i) 非可換ソリトンの解空間の構造解明と可積分系の新しい定式化をに関しては，まずグラスゴー大学の Claire Gilson 氏，Jonathan Nimmo 氏と共同で非可換 ASDYM 方程式のロンスキアン解について詳しく調べた．佐藤理論の要となるタウ関数はロンスキアンで記述されるため非可換の設定では quasi-Wronskian で記述されることが予想される．これを足掛かりにして，quasi-Wronskian の満たす新しい関係式(プリュッカー恒等式・高次元マヤ図形・高次元ヤング図形など)の解明を目指した．2018 年度から Gilson 氏と議論を始め，2019 年度からは応募者の学生の Shan-Chi Huang 氏も加わって 2 年間にわたり毎週綿密な議論を重ねた．ちょうど 2019 年 6 月に英国スコットランドでの研究会があり，成果発表も兼ねて集中的に計算を推進した．
非可換ソリトン方程式の N=2 弦理論への応用に関しては，ラグランジアンでの記述とそのリダクション，およびソリトン解の構成・分類をまず行う．次元還元に関わる非可換 ASDYM 方程式は(2+2)次元上で定義されるが，これは，N=2 弦理論の標的空間上の有効理論の運動方程式と一致する．すなわち，本研究の対象であるさまざまな非可換ソリトン方程式には，N=2 弦理論のある種の古典的配位が対応すると考えられる．この対応の下，ソリトン方程式の厳密解から対応する弦理論の配位の厳密な解析を行う．(欲張らずまずは非可換特有の最も単純な「射影型」ソリトン解を解生成法で構成する．) 特に解の周りの揺らぎやエネルギー密度を計算し，それが(おそらく) 低い次元の D ブレーンを記述していることを実証する(Sen の予想の検証)．N=4 超対称 Yang-Mills 理論と N=2 弦理論との双対関係やツイスター弦理論との接点を調べるのも面白い．可換空間の状況での議論でも十分に価値がある．

(ii) 連携研究者の中津了勇氏(摂南大学)と共同で，非可換 Atiyah-Drinfeld-Hitchin-Manin (ADHM) 構成法の双対性の証明をオペレータ形式において与える． Fock 表現の具体的表示をとり，正則化の方法を定めて，インスタントン・モジュライ空間と ADHM データのモジュライ空間との１対１対応を目指した．また厳密解の系統的構成も与える．指数定理の証明は，応募者と同じ研究科の森吉仁志氏と数学的側面に関して議論を行う．余力があれば，非可換モノポール・非可換ヒッチン系・高次元(6 次元・8 次元)非可換インスタントンに対する同様の双対性証明を目指した．高次元化に関しては応募者の学生の岡部央昂氏と共同で ADHM 構成法や Solution Generating Technique について詳しく調べた．

(iii) その他の応用として，G=U(2N+2)の場合の可換 ASDYM 方程式の可換 Ernst 方程式への次元還元に非可換ベックルント変換の結果を適用し((2N+2)×(2N+2)行列を 2 つの(N+1)×(N+1)にブロック分割することで適用し)，可換空間上の 2N 次元軸対称ブラックホール解を生成する．原理的にこの方法が全てのブラックホールを生成できる場合は解空間についても(次元や対称性など)詳しく調べる．5,6 次元ブラックホールは弦理論の背景時空としても重要な役割を果たしすでに逆散乱法の手法などにより調べ尽くされているが，まずこの別導出を与え，(ブラックホールの質量，角運動量といった)パラメータがラプラス方程式の解の中にどのように入っているのかを見出し，その知見を活かして 7～10 次元の高次元ブラックホール解を系統的に生成する．Ernst 方程式のツイスター理論的取り扱いについて 2019 年 3 月と 6 月にオックスフォード大学の Mason 氏と研究打ち合わせを行った．Mason 氏は 2005 年～2006 年のオックスフォード大学長期滞在のときの受け入れ研究者であり短期間ながら非常に実りある滞在であった．

４．研究成果

(i) グラスゴー大学のC.Gilson氏，J.Nimmo氏，大学院生の黄山齊（Shan-Chi Huang）氏と4人の国際共同研究として，非可換反自己双対 Yang-Mills 方程式のソリトン解の研究を推し進めた．Darboux 変換を用いることで自明解から多重ソリトン解をロンスキアン quasideterminant を用いて厳密に構成した．1ソリトン解のエネルギー密度は可換空間のものと一致し，4 次元空間内の 3 次元超平面上にエネルギーが局在したドメインウォール型(余次元1)であることが示された．さらに多重ソリトンの漸近的振る舞いが可換空間のものと一致することを示した．続いて，可換空間上の G = GL(2) の場合の1 ソリトン解をShan-Chi Huang氏と共同で詳しく調べた．3種の計量（Euclidean,Minkowski, Ultrahyperbolic）で作用密度が実数となる厳密解を構成した．この解は一般は特異点を含むが，実スライスを取ると非特異になり，ブリーザー解が得られる．ASDYM 方程式のブリーザー解の構成はおそらく初めてであると思われる．さらにパラメータの条件をうまく課すと 純粋な1 ソリトン解が得られる．以後これを「ソリトン・ウォール」と呼ぶ．ゲージ群をユニタリにできれば現実の素粒子論・宇宙論への応用の可能性が広がるが，今のところ実現可能なのは Ultrahyperbolic 計量の場合のみでありN=2弦理論への新しい知見を与えている．さらに2021年度もこの研究を推し進め，Shan-Chi Huang氏と共同で多重ソリトンの漸近振る舞いが，1 ソリトンの「重ね合わせ」であることを明らかにし、位相のずれも正確に求めた：M.Hamanaka and S.C.Huang, ``Multi-Soliton Dynamics of Anti-Self-Dual Gauge Fields,'' [arXiv:2106.01353]. Ultrahyperbolic 計量の場合には全領域でユニタリな解であることも示された．これはN=2弦理論において，交差するソリトン・ウォールの存在を示唆している．なお証明においてはquasideterminantを駆使することで証明が見通しよく著しく簡明になる．これは，quasi-Wronskianがやはり本質的であり，新しい定式化の可能性を与えていると考えられる．一連の成果を2021年3月のオンライン国際会議や2020年9月の日本数学会などでも発表した．

(ii) 非可換空間におけるインスタントン解のADHM 構成法については，オペレータ形式での双対性証明を推し進め，特にインスタントン数の起源を幾何学的に自然な公式から再考察することでシフトオペレータの構造をADHM側に見出した．こ高次元ゲージ理論の非可換ソリトン解についてもいくつかの成果がある．学生の岡部央昂氏が非可換 Spin(7)方程式と次元還元された方程式について単独で与えた結果があり，応募者はそれとは別の非可換 Vafa-Witten 方程式，非可換 Kapustin-Witten 方程式について非可換空間特有のソリトン解を構成した．また非可換空間における特異点の除去法についても考察を深め，2019年6月のアゼルバイジャンでの国際会議や2018年12月の可積分系研究会などで発表した．

(iii) 高次元のブラックホール解の構成については，豊田工業大学に春から着任された富沢真也氏と応募者の学生Shan-Chi Huang氏と3人でこの問題について2020年10月から議論を始めたところである．まだ公表すべき成果は得られていないが，ダルブー変換や非可換ベックルント変換の重力理論への応用は初めてであり期待が持てる．他にも，Bow ダイアグラムを用いたクーロンブランチの記述の非可換空間への拡張や，変形量子化のリサージェンス構造，可積分系のラグランジュ形式とアノマリーについても専門家と議論しながら理解を深めた．

本成果報告に詳細は記載されていないが，国内外の研究機関・大学にて研究者セミナー・談話会で 6 件の口頭発表を行っている．時間をかけて多くの研究者と質疑応用を交えることができ，大変有意義であった．共同研究・研究打合せ・成果発表のため多くの旅費を必要としたが，世界中の幅広い分野の専門家と有意義な議論を持つことができ，研究上のつながりも築くことができた．特に(i)の研究は予想外の方向に進展が続いており，新しい研究領域の開拓や新しい研究者ネットワークの構築につながっていくことが期待される．

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計5件（うち査読付論文　3件／うち国際共著　1件／うちオープンアクセス　1件）

１．著者名	４．巻
C. R. Gilson, M. Hamanaka, S.-C. Huang and J. J. C. Nimmo	53, 404002
２．論文標題	５．発行年
Soliton Solutions of Noncommutative Anti-Self-Dual Yang-Mills Equations	2020年
３．雑誌名	６．最初と最後の頁
Journal of Physics A	1,17
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子）	査読の有無
10.1088/1751-8121/aba72e	有
オープンアクセス	国際共著
オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	該当する

１．著者名	４．巻
Masashi Hamanaka and Shan-Chi Huang	10, 101
２．論文標題	５．発行年
New Soliton Solutions of Anti-Self-Dual Yang-Mills Equations	2020年
３．雑誌名	６．最初と最後の頁
Journal of High Energy Physics	1,17
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子）	査読の有無
10.1007/JHEP10(2020)101	有
オープンアクセス	国際共著
オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	－

１．著者名	４．巻
浜中真志	2019AO-S2
２．論文標題	５．発行年
オペレーター形式での非可換ソリトン	2020年
３．雑誌名	６．最初と最後の頁
応力研研究集会報告「非線形波動研究の多様性」	13,19
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子）	査読の有無
なし	無
オープンアクセス	国際共著
オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	－

１．著者名	４．巻
Masashi Hamanaka Hisataka Okabe	197
２．論文標題	５．発行年
Soliton Scattering in Noncommutative Spaces	2018年
３．雑誌名	６．最初と最後の頁
Theoretical and Mathematical Physics	1451, 1468
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子）	査読の有無
10.1134/S0040577918100045	有
オープンアクセス	国際共著
オープンアクセスとしている（また、その予定である）	－

1．著者名 浜中真志	4．巻 653
2．論文標題 可積分系とゲージ場の理論	5．発行年 2017年
3．雑誌名 数理科学	6．最初と最後の頁 59,65
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

〔学会発表〕　計16件（うち招待講演　3件／うち国際学会　10件）

1．発表者名 浜中真志
2．発表標題 Anti-Self-Dual Yang-Mills方程式のソリトン
3．学会等名 M-theory, Strings, and all that
4．発表年 2020年

1．発表者名 C. R. Gilson, M. Hamanaka, S.-C. Huang and J. J. C. Nimmo
2．発表標題 Soliton solutions of noncommutative anti-self-dual Yang-Mills equations
3．学会等名 日本数学会 無限可積分系セッション
4．発表年 2020年

1．発表者名 Masashi Hamanaka and Shan-Chi Huang
2．発表標題 反自己双対 Yang-Mills 方程式のドメイン・ウォール型ソリトン解
3．学会等名 日本数学会 無限可積分系セッション
4．発表年 2020年

１．発表者名
Masashi Hamanaka

２．発表標題
Multi-Soliton Solutions to Anti-Self-Dual Yang-Mills Equation

３．学会等名
Randomness, Integrability and Representation Theory in Quantum Field Theory（国際学会）

４．発表年
2021年

１．発表者名
Masashi Hamanaka

２．発表標題
Noncommutative Instantons in Operator Formalism

３．学会等名
Operators, Functions, and Systems of Mathematical Physics Conference（招待講演）（国際学会）

４．発表年
2019年

１．発表者名
Claire Gilson, Masashi Hamanaka, Shan-Chi Huang and Jonathan Nimmo

２．発表標題
Soliton Solutions of Noncommutative Anti-Self-Dual Yang-Mills Equations

３．学会等名
Integrable systems, special functions and combinatorics（国際学会）

４．発表年
2019年

１．発表者名
浜中 真志

２．発表標題
オペレーター形式での非可換ソリトン

３．学会等名
応力研研究集会「非線形波動研究の多様性」

４．発表年
2019年

１．発表者名 Masashi Hamanaka, Toshio Nakatsu
２．発表標題 Noncommutative Instantons in Operator Formalism
３．学会等名 String-Math 2018（国際学会）
４．発表年 2018年

１．発表者名 Masashi Hamanaka, Toshio Nakatsu
２．発表標題 Noncommutative Instantons and Reciprocity
３．学会等名 D-modules, quantum geometry, and related topics（国際学会）
４．発表年 2018年

１．発表者名 浜中 真志
２．発表標題 非可換空間上の可積分系とその高次元化
３．学会等名 可積分系ウィンタースクール（招待講演）
４．発表年 2018年

１．発表者名 Masashi Hamanaka
２．発表標題 Noncommutative Solitons
３．学会等名 Physics and Mathematics of Nonlinear Phenomena 2017（国際学会）
４．発表年 2017年

1．発表者名 Masashi Hamanaka
2．発表標題 Noncommutative Instantons and Reciprocity
3．学会等名 Calabi-Yau Manifolds: Arithmetic, Geometry and Physics（国際学会）
4．発表年 2017年

1．発表者名 Masashi Hamanaka
2．発表標題 Exact Noncommutative Solitons
3．学会等名 Workshop on solitons, gauge fields and the integrability: Methods and Applications（招待講演）（国際学会）
4．発表年 2017年

1．発表者名 浜中 真志
2．発表標題 非可換ADHM構成法の最近の進展
3．学会等名 第40 回四国セミナー
4．発表年 2017年

1．発表者名 Masashi Hamanaka and Toshio Nakatsu
2．発表標題 Noncommutative Instantons and Reciprocity
3．学会等名 LMS Durham Symposium on Geometric and Alge- braic Aspects of Integrability（国際学会）
4．発表年 2016年

１．発表者名 Masashi Hamanaka
２．発表標題 Noncommutative Instantons
３．学会等名 6th Bangkok Workshop on High-Energy Theory（国際学会）
４．発表年 2017年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

アインシュタイン牧場 http://www2.yukawa.kyoto-u.ac.jp/~masashi.hamanaka/

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

７．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

８．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
英国	グラスゴー大学			