様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　元 年　 ５ 月 １６ 日現在

機関番号：１０１０１
研究種目：挑戦的萌芽研究
研究期間：2016～2018
課題番号：１６Ｋ１３７４１

研究課題名（和文）数え上げ組合せ論の関手化

研究課題名（英文）Functorization of enumerative combinatorics

研究代表者

吉永　正彦（Yoshinaga, Masahiko）

北海道大学・理学研究院・教授

研究者番号：９０４６７６４７

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,600,000円

研究成果の概要（和文）：数え上げ組合せ論は有限集合の要素数に関する数学である。このような素朴な対象である「有限集合の要素数」は、様々な観点から一般化が可能である。例えば、オイラー標数、距離空間のマグニチュードなどがその例である。本研究では、半代数的集合のオイラー標数を使った「負の集合」のアイデアに基づいて、順序集合の間の射の数え上げに関するStanleyの相互律を幾何学的に定式化した。またマグニチュードの圏化であるマグニチュードホモロジーに関する研究を行い、マグニチュードホモロジーと順序複体の関係を見出した。

研究成果の学術的意義や社会的意義
数え上げ組合せ論において、二つの有限集合の要素数が等しいことを証明する重要な手段として「全単射証明」と呼ばれるものがある。本研究では「負の集合」のアイデアを用いることで、「組み合わせ論的等式」を一般化することができた。「全単射証明」とは別方向ではあるが、対象の構造を深く理解する一つの方法を提示できたと考えている。
Magnitudeホモロジーはまだ新しい概念で、応用上もこれから重要になると考えられているが、その計算方法について基礎的な結果を得た。Magnitudeホモロジーの計算にどこまで既存の方法が使えるかというパラメータの閾値が明らかになった。

研究成果の概要（英文）：Enumerative combinatorics is a research area which studies the cardinality of finite sets. The notion of "cardinality of a finite set" can be generalized in several directions, e.g., the Euler characteristic of a topological space, and the magnitude of a metric space. In this project, we generalized Stanley's reciprocity on the order polynomials counting the morphisms between posets to some relation between the Euler characteristics of certain moduli spaces of morphisms of semi-algebraic posets. We also studied the magnitude homology, which is considered to be the categorification of the magnitude, and revealed a relationship with order complex of posets.

研究分野：数学

キーワード：数え上げ組合せ論

様　式　C－１９、F－１９－１、Z－１９、CK－１９（共通）

１．研究開始当初の背景

数え上げ組合せ論において二つの有限集合の位数が等しいことを証明する手段の一つとして、それらの間に「自然な」全単射を構成することがあり（全単射証明)、単に位数が等しいことを証明するよりも望ましいと考えられている。実際、全単射を構成するためには、対象となる有限集合のもつ「構造」を深くとらえる必要があり、位数の等号を示すことよりも徹底的な理解が必要となることが多い。

このような数え上げ問題に対する圏論的な問題意識の一つに「負の集合」に関するものがある。有限集合は、その要素数を数えると「正の整数」になるが、では「要素数が負になるような集合は存在するか？」と問うものである。一件、奇妙な問題意識であるが、数学的には意味のある問題意識で、実際複数の答えが考えられる。その一つは、「位相空間のオイラー標数」を考える、というものである。有限点集合を（離散）位相空間とみなした時のオイラー標数は、その要素数であるが、オイラー標数はより一般の位相空間で考えられ、実際、負の整数になることもある。しかしながら「全単射証明」が数え上げ組合せ論で重視されているのに比して、「負の集合」のアイデアはそれほど重視されているとは言えない。さらに、最近 Leinster 等によって、「有限集合の位数」やオイラー標数の一般化として、magnitude という概念が提唱されている。Magnitude は、一般に距離空間や豊穣圏に対して定義され、有限集合の位数やオイラー標数のみならず、エントロピーや生物種の多様性を測る量とも関係していることが知られており、将来性のあるテーマである。

もう一点、広い意味で関わる背景としては、周期に関する Kontsevich-Zagier の予想が挙げられる。この予想は、積分表示される実数たちの間に成り立つ等号は、単に実数として等しいのではなく、積分の操作のレベルでの同値性を示唆している。二つの実数が等しいということの背後には、何らかの有限的な「操作」を介してつながるという予想であり、数の等号の背後には、より深い構造のレベルでの同値性があるだろうと考えられている。

２．研究の目的

このように数え上げ組合せ論における、位数の一致の背後にある構造を問う問題意識に対しては、圏論的な視点からのアプローチが有効であると考えられる。本研究では、有限集合の要素数が等しいことの背後にある圏論的な機構を明らかにし、「負の集合」の概念を数え上げ組合せ論に導入し、それを応用して数え上げ組合せ論の結果を幾何学的に拡張すること、周期に関する予想の離散類似や magnitude に関する類似を追求することが目的である。「負の集合」を使った数え上げ組合せ論の研究に、「全単射証明」と同様の重要性を見出せると考えている。

３．研究の方法

本テーマはまだ方向性が定まっていない、萌芽的な面もあるため、いくつかの異なる方法で研究を行った。一つ目は圏論的な視点による数え上げ組合せ論の研究で、Joyal らによって導入された Species という概念と密接に関係している。有限集合に対して、別の有限集合を対応させる対応を「関手」ととらえ、その関手としてのふるまいを調べる。次に「負の集合」を使って、数え上げ組合せ論の結果を幾何学的に拡張する。具体的には、「半代数的集合と半代数的オイラー標数」を負の集合の実現と位置付けて、有限集合に関する結果（個数の一致）を、二つの半代数的集合のオイラー標数の一致、という拡張された形で実現する。最後に、本研究期間中に Leinster，Shulman らによって導入された “ Magnitude homology ” の基礎的な研究を行う。

４．研究成果

研究協力者の長谷部氏との共同研究で、ポセットの順序多項式に関する Stanley の相互律を詳細に研究した。有限ポセットに対して、そこから全順序ポセット[n]={1, 2, … , n}への weakly increasing/strictry increasing な写像の個数を数えると、ともに n に関する多項式となり、二種類の順序多項式が得られる。これらの多項式は、n→-n という変換でうつりあう、というのが Stanley の相互律である。我々は、半代数的順序集合という概念を定式化し、有限ポセットから半代数的ポセットへの射全体の集合に再び半代数的集合の構造が入り、問題を二種類の空間のオイラー標数の間の相互律として定式化した。Stanley の相互律において、n を-n に置き換えるという操作は、ポセットに対して、開区間(0, 1)または実数直線 R をかけて辞書式順序を考える、という操作を対応させることで、我々の相互律を全順序集合に制限することで、Stanley の相互律が得られる。学生の宮谷俊典氏を加えて、グラフの彩色多項式や流れ多項式まで拡張することにも成功し、成果を論文として発表した。

Magnitude ホモロジーの導入を受け、大学院生の金田龍貴氏と共同研究を行い、距離空間の Magnitude ホモロジーに関するいくつかの基本的な結果を得た。距離空間の二点に対して、二点の間の点集合（区間）に自然にポセットの構造が入る。Magnitude homology は部分的にはこのポセットの順序複体の被約ホモロジー（の次数をシフトしたもの）と一致する、という観察に基づいて、様々な空間の Magnitude ホモロジーの計算を実行する方法が得られた。その応用として、Leinster-Shulman の先行研究では未解決であった、ユークリッド空間の高次の Magnitude ホモロジーの消滅や、予想に反して、マグニチュードホモロジーがねじれを持つ例の存在が分かった。以上の結果については、論文 R. Kaneta, M. Yoshinaga, Magnitude homology

of metric spaces and order complexes を現在投稿中である。
　Magnitude homology に関しては、応用数学で活発に研究されているパーシステントホモロジーとの関係も示唆されており、この方面の研究者との交流をはじめられたことで magnitude ホモロジー自体も応用を広げていくのではないかと期待できる。京都大学の平岡裕章氏やその周辺の研究者との交流の中で、Ehrhart 相互律と Verdier 双対性の関係、直線配置の実現空間と、quiver の表現のモジュライの複雑性に関する理解が深まり、今後の発展が期待できる。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計１件）
[1] T. Hasebe, T. Miyatani, M. Yoshinaga, Euler characteristic reciprocity for chromatic, flow and order polynomials. Journal of Singularities, vol. 16 (2017), 212-227. 査読有, DOI: 10.5427/jsing.2017.16k

〔学会発表〕（計 10 件）
[1] 吉永正彦，マグニチュードとポセットトポロジー，数理経済談話会，信州大学，2019 年 2 月 4 日.
[2] 吉永正彦，超平面配置と特性準多項式，名古屋工業大学談話会，2018 年 12 月 6 日.
[3] 吉永正彦，組合せ論的相互律とオイラー標数．東北大学代数幾何セミナー，2018 年 11 月 2 日
[4] 吉永正彦，組合せ論的相互律とオイラー標数．大談話会，2017 年 12 月 27 日，京都大学
[5] 吉永正彦，組合せ論的相互律とオイラー標数．数理談話会，2017 年 12 月 7 日，九州大学
[6] Masahiko Yoshinaga, The Euler characteristic reciprocity for order polynomials, The 4th Franco-Japanese-Vietnamese Singularities 11 Nov. 2016, Chambery (France).
[7] 吉永正彦, The Euler characteristic reciprocity for order polynomials, Enumerative, algebraic and geometric aspects of arrangements, Bremen University (Germany), 25 August 2016
[8] Masahiko Yoshinaga, Euler characteristics in enumerative combinatorics. Asian Mathematical Conference (AMC 2016), Bali (Indonesia), 28 July 2016.
[9] 吉永正彦，半代数的集合のオイラー標数と組合せ論的相互律，幾何学コロキウム，北海道大学，2016 年 7 月 1 日.
[10] 吉永正彦，半代数的集合のオイラー標数と組合せ論的相互律，特異点の大域的研究，兵庫教育大学 神戸ハーバーランドキャンパス，2016 年 6 月 22 日.

〔図書〕（計 0 件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計 0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年：
国内外の別：

○取得状況（計 0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織

(1)研究分担者

研究分担者氏名：

ローマ字氏名：

所属研究機関名：

部局名：

職名：

研究者番号（8 桁）：

(2)研究協力者

研究協力者氏名：長谷部 高広

ローマ字氏名：Takahiro Hasebe

※科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。