

令和元年6月6日現在

機関番号：14301

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2016～2018

課題番号：16K13761

研究課題名(和文) Turing型オートマトンの分類とその解析手法の確立

研究課題名(英文) Classification and analysis of Turing type automata

研究代表者

辻本 諭 (TSUJIMOTO, SATOSHI)

京都大学・情報学研究科・准教授

研究者番号：60287977

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,600,000円

研究成果の概要(和文)：離散可積分系において見出された箱玉系と共通する性質をもつミーリ型オートマトンに対して、その組合せ論的性質を明らかにするなど、様々な特徴付けを明らかにした。その中で、箱玉系と1次元単純ランダムウォークとの関係性を基に、可積分系と確率論の両分野の観点を導入することで、その不変測度などの議論が可能となった。

研究成果の学術的意義や社会的意義

ここでの研究成果は、非常に近い研究対象を扱ってきたにもかかわらず、独立に発展してきたオートマタ群、離散可積分系および情報科学の各分野の観点を包括的に取り入れている点に学術的意義が見出される。代数学や離散可積分系の理論を経由せず Turing 型オートマトンを直接扱うことで、これまで予想もされていなかった新しいモデルとその解法がみつかることができ、さらに組織的に調べあげていくことで、Turing 型オートマトンに対する組織的な解析を可能にすし、オートマトンに関連する幅広い分野に貢献することが期待できる。

研究成果の概要(英文)：We have clarified various characterizations, such as the combinatorial properties of Mealy-type automata that have properties in common with the box-ball system found in discrete integrable systems. Among them, by introducing the viewpoint of both integrable system and probability theory based on the relationship between the box ball system and the one-dimensional simple random walk, it became possible to discuss the invariant measure etc.

研究分野：離散可積分系，特殊関数

キーワード：オートマトン 離散可積分系 箱玉系 Pitman変換

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

Turing 型オートマトンは、情報科学の計算論や言語理論などにおいて中心的役割を果たす基本的な研究対象である。例えば、Mealy 型と呼ばれるオートマトンは、ツリー上の作用からオートマタ群やオートマタ半群を定め、Burnside 問題などにおいて重要な役割を果たしてきた。一方、可積分系においては、ソリトン性を有するセルオートマトンとして箱玉系が大きな注目を浴び、「超離散化」と呼ばれる新しい解析手法や組合せ論的手法など劇的な発展を遂げてきた。最近の研究の中から、オートマタ群の代表例である点灯夫群と箱玉系のそれぞれに付随するスペクトル分布の間に共通する数理構造が見出され、これまで可積分系の立場から十分に考察されてこなかったミーリ型オートマトンに対し、箱玉系とオートマタ群の観点から調べる必要が新たに生じていた。

また、確率論を用いた可積分系研究の中に、ランダムな初期状態の下で KdV 方程式の時間発展について調べた研究がある。ホワイトノイズが KdV 方程式の不変分布となるかどうかは、その時間発展の定義も含め、基本的な問題でありながら未解決な問題である。この未解決問題に関連して、偏微分方程式で記述される KdV 方程式の可積分な離散類似の超離散化から得られる箱玉系に着目し、箱玉系の不変分布などについて調べる必要があった。

2. 研究の目的

計算機の基礎モデルである Turing 型オートマトンの一種は、自然に定まる生成元の間関係式からオートマタ群あるいはオートマタ半群を定め、ケーリーグラフの上のランダムウォーク作用素や文字列集合上の力学系を誘導する。この観点を可積分系にまで広げ、これまで独立に深められてきた関連分野を俯瞰し、情報科学の手法を用いることで、Turing 型オートマトンの初期値問題や対応するスペクトルの厳密な解析が可能なクラスを明らかにする。また、超離散極限を通じて対応する離散系に関しても、その厳密解について、特殊関数による表示と解析も含め、従来理論をより深めていく。

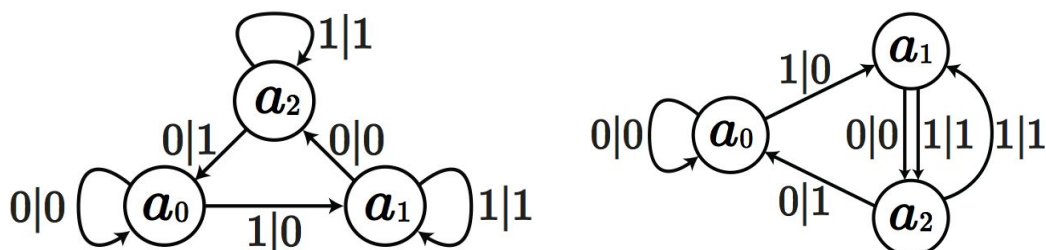
3. 研究の方法

計算機の基礎モデルであるオートマトンが文字集合上に作用する場合、オートマトンの各状態に応じて基本関係式が得られ、オートマトン群あるいはオートマトン半群が自然に定まる。これにより、文字集合上の力学系やケーリーグラフ上のランダムウォーク作用素が誘導されることとなる。本研究では、これまでオートマトン群とは独自の発展を遂げてきた可積分系における箱と玉のみからなる系(箱玉系)とオートマトンとの関係性を見いだすことで、オートマトンとその極限操作などを通じて直接関連するシステムに対して、より幅広い観点からの解析を深めていくものである。特に情報学で発展した理論の上に、代数学や組合せ論を用いることで、可積分なオートマトン系に対する新しい特徴付けを見いだしていく。

また、箱玉系と1次元単純ランダムウォークとの関係性を基に、可積分系と確率論の両分野の観点から解析をすすめることが可能となってきた。ここでは、オートマトンの初期文字列のランダムネスに対して、確率論的な解釈をあたえることで、両側無限格子かつ無限個の玉を初期列として与えた箱玉系へとモデルを一般化する。これにより、箱玉系の初期文字列を1次元単純ランダムウォークとみなす解釈をあたえ、1次元単純ランダムウォークからブラウン運動への極限を考えることで、「実数直線上の箱玉系」と呼ぶべき系が得られる。また、箱玉系の無限回の時間発展が可能な、両側無限格子かつ無限個の玉が配置された初期列の特徴づけも与えることや、箱玉系の時間発展で不変な測度などに関しても議論が可能となる。

4. 研究成果

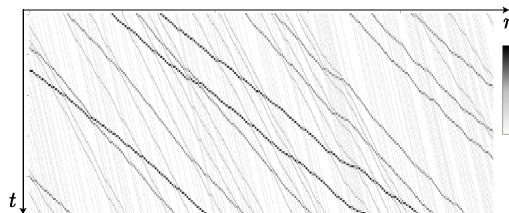
これまでオートマトン群とは独自の発展を遂げてきた可積分系における箱玉系とオートマトンとの関係性を見いだすことで、オートマトンとその極限操作などを通じて直接関連するシステムに対して、より幅広い観点からの解析を進めてきた。これにより、これまで独立に扱われてきた関連分野を俯瞰し、情報科学で発展してきた手法とともに、Turing 型オートマトンの初期値問題が解析可能となるオートマトンを明らかにしてきた。特に、状態数を3に限定したミーリ型オートマトンでは、1990年の高橋・薩摩による箱玉系の運搬車拡張されたシステムを含め、ソリトン性を有するものが3つのみであることを見出した。高橋・薩摩のルール以外に、「2番目空き箱ルール」(左下図)、「1つ飛ばしルール」(右下図)と名付けた箱玉系を明



らかにした。これら3つの箱玉系に対しては、ソリトン性の証明を始め、任意の初期値に対してソリトンの大きさ・個数を初等的な手続きで求

める方法を明らかにした。この手法は、状態数や文字集合を増やした場合についても適用可能であり、ソリトン性を有するオートマトンが多数見つかってきており、今後の可積分なオートマトンに対する研究のさらなる進展を促すものと期待される。これまで散発的に見つかった箱玉系を始めとする、厳密な解析が可能なオートマトンに対して系統的に研究することが可能となり、情報科学の理論なども用いつつ、可積分系の観点から特徴付けを与えた。

また、箱玉系と1次元単純ランダムウォークとの直接的な関係性を明らかにし、決定論的な力学系である古典可積分系に対して、確率論を用いた解析手法を展開した。ここでは、箱玉系をはじめとする離散時空間上の可積分系に対して、確率論における Pitman 変換の観点を導入し、ランダムな初期状態の振る舞いを考えることで、確率論の観点から可積分系の多彩な性質を明らかにした。具体的には、箱玉系と Pitman 変換の間の対応関係を見出すことで、代表的な離散可積分系に対する Pitman 変換とその拡張を用いた表示、ならびにその両側無限格子上の力学系としての定式化を与えることに成功した(右図参照)。その上で、不変測度やエルゴード性などの基本的な問題に対する解析を進めた。さらに、Pitman 変換に対する逆超離散化を議論することで、これまでの箱玉系に対する議論を有理写像で表される離散可積分系へと対象を広げて、議論の有効性を確かめることができた。特に、1次元単純ランダムウォークからブラウン運動への極限から得られた「実数直線上の箱玉系」と超離散戸田方程式との関係も明らかになってきている。さらに、箱玉系以外のソリトン・オートマトンに対しても確率論の観点から解析を深めており、容量付き箱玉系に対するパス表示を導入すると同時に、高次元系での Pitman 変換に対応するソリトン・オートマトンなど今後の研究の手がかりも得られた。本研究課題の中で見出された新しい観点は、これまでの成果で得られたオートマトンに適用することもでき、現在解析を進めているところである。



加えて、離散可積分系の特殊解として現れる直交多項式に関する理論についても、いくつかの新しい結果が得られた。その成果の一つとして、 q 変形振動子代数の三重対角行列による表現を構成的に与え「三重対角化法」と呼ばれる手法を用いることでアスキー-ウィルソン多項式が単純な q 変形代数から導出できることを明らかにした。また、量子通信に対する理論研究の中から、反対角線について対称な Jacobi 行列に付随する直交多項式として、与えられたスペクトル列から一意的に定まる三重対角行列を再構成する効率的なアルゴリズムの定式化も成功した。

5. 主な発表論文等

[雑誌論文] (計 10 件)

Satoshi Tsujimoto, Luc Vinet and Alexei Zhedanov, Double affine Hecke algebra of rank 1 and orthogonal polynomials on the unit circle, to appear in "Constructive Approximation", arXiv:1709.07226 [math.RT], 査読有

Yu Luo and Satoshi Tsujimoto, Exceptional Bannai-Ito polynomials, Journal of Approximation Theory 239 (2019), pp.144-173, DOI:10.1016/j.jat.2018.12.003, 査読有

Geoffroy Bergeron, Luc Vinet and Satoshi Tsujimoto, Generating functions for the Bannai-Ito polynomials, Proceedings of the American Mathematical Society 146 (2018), pp.5077-5090, DOI:10.1090/proc/14158, 査読有

Saburo Kakei, Jonathan J.C. Nimmo, Satoshi Tsujimoto and Ralph Willox, Linearization of the box-ball system: an elementary approach, Journal of Integrable Systems 3 (2018), pp.1-32, DOI:10.1093/integr/xyy002, 査読有

辻本 諭, On soliton automata, 数理解析研究所講究録 2071 (2018), pp.134-140, 査読無

Satoshi Tsujimoto, Luc Vinet, Guo-Fu Yu and Alexei Zhedanov, Symmetric abstract hypergeometric polynomials, Journal of Mathematical Analysis and Applications 458 (2018), pp.742-754, DOI:10.1016/j.jmaa.2017.09.033, 査読有

Satoshi Tsujimoto, Luc Vinet and Alexei Zhedanov, Tridiagonal representations of the q -oscillator algebra and Askey-Wilson polynomials, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical 50 (2017), 235292 (15pp), DOI:10.1088/1751-8121/aa6f3a, 査読有

Vincent X. Genest, Satoshi Tsujimoto, Luc Vinet and Alexei Zhedanov, Persymmetric Jacobi matrices, isospectral deformations and orthogonal polynomials, Journal of Mathematical Analysis and Applications 450 (2017), pp.915–928, DOI:10.1016/j.jmaa.2017.01.056, 査読有

篠原麻礼, 坂田幸太郎, 辻本 諭, 高橋大輔, 1 つ飛ばし箱玉系について, Reports of RIAM Symposium 28AO-S6 (2017), pp. 81–86, 査読有

辻本 諭, 新しい箱玉系のルールとその解析, Reports of RIAM Symposium 28AO-S6 (2017), pp.13–18, 査読有

〔学会発表〕(計 5 件)

Satoshi Tsujimoto, Spectral analysis of transition operators, automata groups and translation in BBS, China-Japan Joint Workshop On Integrable Systems, 2016

辻本 諭, q 変形振動子代数と Askey-Wilson 多項式, 日本応用数理学会, 2017

辻本 諭, DAHA 代数と単位円周上の直交多項式, 日本応用数理学会, 2018

Satoshi Tsujimoto, Quantum walks on graphs and spin networks, The 12th AIMS conference, 2018

辻本 諭, Pitman 変換による箱玉系の解析, 日本応用数理学会, 2018

〔図書〕(計 1 件)

辻本 諭, 「可積分系の数理」第 2 章 離散可積分系, 中村佳正編, 朝倉書店 (2018), pp. 123-190.

〔産業財産権〕

出願状況 (計 0 件)

取得状況 (計 0 件)

〔その他〕

ホームページ

<http://www-is.amp.i.kyoto-u.ac.jp/lab/tujimoto/>

6 . 研究組織

(1)研究協力者

研究協力者氏名：加藤 毅

ローマ字氏名：(KATO, Tsuyoshi)

研究協力者氏名：前田 一貴

ローマ字氏名：(MAEDA, Kazuki)

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。