様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ３０ 年　 ６ 月　 ８ 日現在

機関番号：１７１０２
研究種目：挑戦的萌芽研究
研究期間：2016～2017
課題番号：１６Ｋ１３７６３

研究課題名（和文）離散微分幾何に基づく離散時間幾何モデルの構築

研究課題名（英文）Construction of time discrete geometric models based on discrete differential geometry

研究代表者
梶原　健司（Kajiwara, Kenji）

九州大学・マス・フォア・インダストリ研究所・教授

研究者番号：４０２６８１１５

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　1,700,000円

研究成果の概要（和文）：本研究では(a)伸縮や外力を伴う曲線変形の離散モデル，(b)界面の変形の離散時間モデル，(c)1次元弾性体の離散モデルの研究を進めた．(a)では曲線短縮方程式の新しい離散モデルと離散局所誘導方程式の構築に成功した．(b)ではHele-Shaw流を記述する複素Dym方程式の双線形化に成功，また土壌中の水浸透に関するBroadbridge-Whiteモデルの離散化と数値計算に成功した．(c)についてはオイラーの弾性曲線の可積分離散モデルの離散変分原理による定式化に成功し，さらに相似幾何における弾性曲線が設計工学で使われる対数型美的曲線に他ならないことを示し，その一般化に対する数学的基盤を与えた．

研究成果の概要（英文）：In this project, the following three topics have been studied:(a)discrete models of curve deformation with extension and external force, (b)time discrete model of deformation of layer, (c) discrete model of one-dimensional elastic rod. As to (a) we succeeded in constructing a new discrete model of the curve shortening equation and discrete local induction equation. For (b) we obtained the bilinearization of the complex Dym equation describing the Hele-Shaw flow, and also succeeded in discretization of the Broadbridge-White model for the one-dimensional soil water infiltration and its numerical simulation. Regarding (c) we succeeded in formulating the integrable discrete model of the Euler's elastic curves by the discrete variational principle. Further we have shown that the elastic curves in the similarity geometry are nothing but the log-aesthetic curves used in the industrial design, and gave a sound mathematical foundation for their generalization.

研究分野：可積分系，離散微分幾何

キーワード：離散微分幾何　可積分系　曲線　ソリトン方程式　弾性曲線　相似幾何　変分原理　対数型美的曲線

１．研究開始当初の背景

微分幾何・離散微分幾何において曲線族や曲面は線形偏微分方程式系の両立条件として得られるが，与えられた性質をもつ曲線族や曲面を具体的に構成することは一般には困難とされる．そこで可積分系の手法による具体例の構成や変換・変形の定式化が，特に適用できる解析的な手法が限られる離散微分幾何にとっては大きな意味を持つ．代表者は2009 年頃から離散可積分系の理論を離散曲線・曲面論に応用する着想を推し進め，さまざまな状況下での離散曲線の可積分変形やある種の離散曲面の理論を構築してきた．その中から，可積分構造を背後に持つ幾何オブジェクトの変形について，離散微分幾何の枠組みで統制されるよい時間離散化の手法を確立し，その成果を，界面や渦糸など幾何オブジェクトの大変形や特異性を伴う変形に対する高精度数値解析スキームや，CG における可視化手法として用いるという着想を得た．

２．研究の目的

本研究では，幾何から従う可積分構造を持つ系の変形に対して，離散可積分系・離散微分幾何で培われた手法を適用し離散時間モデルを構築する．またそれらのモデルを，界面や渦糸など幾何オブジェクトの大変形や，特異性を伴う変形に対する高精度数値解析スキームとして有効性を検証する．特に，

(1) 伸縮や外力を伴う曲線変形の離散モデル
(2) 界面の変形の離散時間モデル
(3) 1 次元弾性体の離散時間モデル

に焦点を当てて研究を進める．

３．研究の方法

(1)①viscous fingeringやパターン形成の基本モデルとして重要な曲線短縮方程式を取り扱う．方程式としては非可積分だが，可積分モデルである平面曲線の等周変形理論の特殊な場合として現れ，すなわち，スペクトルパラメータが入らない擬 Lax 対を持つ．この構造を利用して曲線短縮方程式の離散モデルの構築を試みる．
② 空間中の外場のない渦糸の離散モデルである局所誘導方程式の離散化を完成させ，τ函数による明示公式を構築する．これを元に，外場中の渦糸の離散モデルの構築を試みる．
(2)① Hele-Shaw 流を外力項付きの複素 Dym 方程式で記述する Howison の理論に着目，Dym 方程式がホドグラフ変換で平面曲線の等周変形を記述する modified KdV に帰着することを利用して，複素 Dym 方程式の離散化を試みる．
② 界面のモデルとして，１次元の土壌中の水浸透モデルである Broadbridge-White モデルを取り上げる．このモデルは従属変数の１次分数変換とホドグラフ変換によって Burgers 方程式に帰着し，さらに Cole-Hopf 変換によって線形拡散方程式に帰着する．離散微分幾何の立場から得られたホドグラフ変換の離散化を活用し，可積分離散化の手法を適用して Broadbridge-White モデルの離散モデルを構築し，実際に数値計算を行う．
(3)については，西成による 1 次元離散コッセラー弾性体理論の時間離散化を目指し，特にセグメントのポテンシャルを戸田ポテンシャルに取って離散時間戸田格子方程式の理論を活用して離散時間モデルの構築を試みる．

４．研究成果

(1)①Wadati-Nakayama の曲線短縮方程式の離散化を改良し，離散曲線短縮方程式を定式化した．ポイントは離散曲率としてこれまでの研究成果を反映した量を採用したことで，これによりより数学的に妥当な離散モデルとなった（論文準備中）．今回は検討の結果このアプローチを結局採用しなかったが，平面曲線の等周変形理論で，理論の中の任意函数を特殊化すると，弧長を保存しないはずの曲線短縮方程式が現れる．これは明らかな不整合であるが，なぜそのようなことが起こるのか，理論的に解明すべき点が残っている．
② 離散非線形シュレディンガー方程式に基づく離散局所誘導方程式の構築に成功した（図書(1)）．また，2 成分 KP 階層のτ函数による空間曲線の一般的な明示公式を構築し，連続，半離散（離散曲線の連続変形），離散モデル全てに共通な表式を得た．また，閉曲線に対する時間発展のアルゴリズムを構築し，数値計算を行った（論文投稿中）．
(2) ① Hele-Shaw 流に関する Howison の理論を検討し，複素 Dym 方程式に関する若干の誤りを訂正して外力項付きの複素 Dym 方程式を得て，ホドグラフ変換で外力項付きの modified KdV 方程式を得た．特に外力項がない場合と自己無撞着場の場合に，広田の方法によって双線形化をすることに成功した（論文(5)）．ただし，複素共役条件，外場の調和性と整合する厳密解を作ることは，技術的な困難により成功に至っていない．
② Broadbridge-White モデルの離散化は，それが変数変換の後に Burgers 方程式，さらに線形拡散方程式に帰着することを使って，線形拡散方程式の離散化と変数変換，特に Cole-Hopf 変換とホドグラフ変換の離散化を組み合わせて行った．可積分系の理論で通常用いられる拡散方程式の離散化は，空間は中心差分，時間は前進差分で，これは空間・時間の差分間隔の比の値によって数値不安定性を示す典型的なスキームで，実際にそれで計算をしてみると数値不安定性により高精度の数値計算は困難である．また，線形拡散方程式でなく離散 Burgers 方程式を直接数値計算すれば数値不安定性は非線形性で打ち

消されるという期待があったが，やはり同様の数値不安定性が見られた．すなわち，通常，理論で用いられる可積分スキームは数値計算スキームとしては実用に耐えないことがわかった．
これに対して，本研究では線形レベルの離散化として，可積分系の理論では通常使われないが，数値安定な高精度スキームを選択してBroadbriege-White モデルの離散化を行った．具体的には，実装が比較的簡単で無条件安定な後退オイラー法と，境界条件の実装が技術的に面倒だが 2 次精度のスキームであるCrank-Nicholson 法を採用して離散モデルを構築した．両者を用いて数値計算を行い，理論通りの精度が得られることを確認した．元の Broadbridge-White モデルに直接Crank-Nicholson 法を適用したスキームと可積分スキームを比較すると，条件の悪い場合ほど後者が精度，計算速度とも優位になることがわかった．この成果は，今後さまざまな離散可積分モデルを実際に数値計算に使う際に，重要な指針となると考えられる（論文(3)).

(3)1 次元弾性体のもっとも基本的なモデルとして，オイラーの弾性曲線が挙げられる．まず，オイラーの弾性曲線の離散化に取り組み，十河や Bobenko の理論を整備し，適切なエネルギー汎函数を導入して，離散弾性曲線を曲線の変分に対する離散変分原理により定式化することに成功した．これを用いて，与えられた曲線を離散弾性曲線で近似する手法を確立することができた（論文準備中).
また，弾性曲線のエネルギー汎函数は曲率の 2 乗であるが，これは曲げにフックの法則を適用した曲げエネルギーに他ならない．これに戸田ポテンシャルを仮定した曲げエネルギーを導入し，戸田格子的な弾性曲線を考察した．
これらの成果を得た時点で，工業意匠設計の研究者に，車のデザイナーが美しいと感じる曲線族から抽出して得られた「対数型美的曲線」(Log-aesthetic curve, LAC)の特徴付けの問題を問われた．検討の結果，ユークリッド幾何でなく，群作用の不変性に着目するクライン幾何の１つである「相似幾何」におけるオイラーの弾性曲線の類似物であるということが明らかになった．設計工学の分野で重要で，将来性の高い課題であるため，上の 1 次元弾性体の離散モデルの研究は保留し，LAC の研究に切り替えた．その結果，以下の成果を得た．（論文(1),(2),(4)）
・LAC を相似幾何における不変パラメータを保存する可積分変形の定常流として特徴付けた．
・フェアリング汎函数を導入し，LAC をこの汎函数に対する変分原理で特徴付けた．フェアリング汎函数は相似曲率の 2 乗と付加項からなる．
オイラーの弾性曲線はユークリッド幾何の不変パラメータ（弧長）を保存する可積分変形の定常流として特徴付けられ，曲率の 2 乗であるエネルギー汎函数に対する変分原理で定式化される．この意味で，LAC は弾性曲線の相似幾何類似である．この定式化を応用し，離散 LAC を構築した．すなわち，
・離散 LAC を相似平面の離散曲線に対する不変パラメータを保存する可積分変形の定常流として導入した．
・離散 LAC に対して離散フェアリング汎函数を導入し，離散変分原理で定式化することに成功した．これによってこれまでユークリッド幾何の枠組みで手探りで研究されてきたLAC やその一般化（空間曲線，曲面）に全く新しい，かつ確固とした数学的基盤を与えることができた．

本研究の成果により，今後取り組むべきさまざまな興味深い問題が浮上している．そのうちいくつかについて述べておく．

- 曲線短縮方程式：平面曲線の等周変形理論との整合性に理論的に何らかの解釈を与え，それをベースに離散モデルの構築ができれば興味深い．
- 外場中の渦糸のモデル：自己無撞着場付の非線形シュレディンガー方程式とその離散化から意味のあるモデルが構成できる可能性がある．
- Hele-Shaw 問題：複素 modified KdV 方程式，複素 Dym 方程式はまだ研究されたことがない．複素共役条件を満たす正則な解を構成することは理論的に重要な問題である．
- １次元弾性体モデル:曲げエネルギーに戸田ポテンシャルを採用したモデルは全く別の文脈で（戸田ポテンシャルと認識されることなく），指の力学モデルとして工学的な研究がある．理論的な研究を組織的に推進すると面白いと思われる．
- 対数型美的曲線：オイラーの弾性曲線の相似幾何類似という特徴付けを活用して，空間曲線や曲面への拡張，およびその離散化を組織的に推進することが望まれる．設計工学に対する基本的な貢献になると思われる．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 5 件）

(1) 井ノ口順一，<u>梶原健司</u>，三浦憲二郎，朴炯基，W.K. Schief，相似幾何における弾性曲線とその離散化・CAGD との関連について，九州大学応用力学研究所研究集会報告(2018，出版予定)（査読有）
(2) J.Inoguchi, <u>K. Kajiwara</u>, K.T.Miura, M. Sato, W. K.Schief and Y.Shimizu, Log-aesthetic curves as similarity geometric analogue of Euler’s

elasticae, Comp. Aided Geom. Design, **61** (2018) 1-5, DOI:10.1016/j.cagd.2018.02.002（査読有）

(3) D. Triadis, P.Broadbridge, K. Kajiwara and K. Maruno, Integrable Discrete Model for One-dimensional Soil Water Infiltration, Stud. Appl. Math., **140**(2018) 483-507, DOI: 10.1111/sapm.12208（査読有）

(4) K.T. Miura, S.Suzuki, R.U. Gobithaasan, S.Usuki, J.Inoguchi, M.Sato, K. Kajiwara and Y.Shimizu, Fairness metric of plane curves defined with similarity geometry invariants, Computer-Aided Design & Applications, **15**(2018) 253-263, DOI: 10.1080/16864360.2017.1375677（査読有）

(5) 野見山雅之, 筧三郎, 梶原健司, 表面張力入りの Hele-Shaw 問題,九州大学応用力学研究所研究集会報告 26AO-S2「非線形波動研究の現状−課題と展望を探る−」(2017),176-181.（査読有）

〔学会発表〕（計 27 件）

(1) 梶原健司, D.Triadis, P. Broadbridge, 丸野健一, 土壌中の水浸透現象に対する可積分離散モデルの比較検討, 日本応用数理学会第 14 回研究部会連合発表会,2018.

(2) D.Triadis, P. Broadbridge, K. Kajiwara, K. Maruno, An integrable discrete model for soil-water infiltration, ANZIAM Conference 2018.

(3) K. Kajiwara, Log-Aesthetic Curves in Industrial Design as Similarity Geometric Analogue of Euler’s Elastic Curves, アメリカ数学会Joint Mathematics Meeting 2018.

(4) K. Kajiwara, dNLS flow on discrete space curves, 10th IMACS Conference on Nonlinear Evolution Equations and Wave Phenomena, 2017.

(5) K. Kajiwara, An integrable discrte model of vortex filaments, 12th International Conference on Symmetries and Integrability of Difference Equation, 2016.

〔図書〕（計 1 件）

(1) S.Hirose, J. Inoguchi, K. Kajiwara, N. Matsuura and Y.Ohta, dNLS flow on discrete space curves, Mathematics for Industry Vol.24 (Springer, 2016) 137-150, DOI:10.1007/978-981-10-1076-7_14

〔産業財産権〕

○出願状況（計 0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計 0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕該当なし.

６．研究組織

(1)研究代表者
梶原 健司（KAJIWARA, Kenji）
九州大学・マス・フォア・インダストリ研究所・教授
研究者番号：40268115

(2)研究分担者
該当なし

(3)連携研究者
丸野 健一（MARUNO, Ken-ichi）
早稲田大学・理工学術院・教授
研究者番号：80380674

筧 三郎（KAKEI, Saburo）
立教大学・理学部・教授
研究者番号： 60318798

廣瀬 三平（HIROSE, Sampei）
芝浦工業大学・デザイン工学部・助教
研究者番号：20743230

(4) 研究協力者
Philip Broadbridge
ラ・トローブ大学・教授