

令和元年5月31日現在

機関番号：11301

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2016～2018

課題番号：16K13768

研究課題名(和文)複合媒質上の伝送問題と伝送条件を伴う優決定問題

研究課題名(英文)Transmission problems in composite media and overdetermined problems with transmission conditions

研究代表者

坂口 茂(SAKAGUCHI, SHIGERU)

東北大学・情報科学研究科・教授

研究者番号：50215620

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,600,000円

研究成果の概要(和文)：伝導率の異なる介在物を含有する複合媒質を考える。媒質内の電気伝導や熱伝導は媒質の伝導率に依存するため、相異なる2種の媒質の界面上では光の屈折のように電流や熱流に対して伝送条件が成立する。主な成果の一つは複合媒質上の定常電気伝導を扱い、外部の様な電場への影響の少ない無限に多くの非対称な近似中性導体の存在を示したことである。もう一つは定常熱伝導を扱い、球形複合媒質の境界上の温度と熱流が共に一定の場合は介在物は同心球に限ることを示し、さらに境界上の温度と熱流が共に一定でも非対称な複合媒質が無限に多く存在することを示したものである。

研究成果の学術的意義や社会的意義

一つの物質からなる単一媒質上の電気伝導や熱伝導の数理モデルは最も単純で多くの研究がなされてきた。一方、外部一様電場に全く影響を与えない中性導体は1962年に Hashin, Shtrikman らが同心球からなる2相の複合媒質によって構成し、複合媒質の重要性が認識された。もちろん、物理的・工学的に自然な複合媒質(複合材料)の数理モデルの重要性は言うまでもない。本研究成果の学術的・社会的意義は単一媒質上の数理モデルに対応する複合媒質上の数理モデルは一見同様に見えるが本質的に異なることを電気伝導や熱伝導の単純な数理モデルで数学解析を用いて示したことにある。

研究成果の概要(英文)：We consider composite media with an inclusion having different conductivity. Since the electrical conduction and heat conduction in composite media depend on their conductivities, on the interface between two different media the electric current and heat flow satisfy the transmission conditions like refraction of light. One of our main results deals with the steady electrical conduction on the composite media, and it is shown that there exist infinitely many non-symmetric composite media which are weakly neutral to and having little influence on external uniform electric fields. Another deals with the steady heat conduction, and we show that if both temperature and heat flow on the boundary of the spherical composite media are constant, then the inclusion must be a concentric ball, and moreover, we show that there exist infinitely many non-symmetric composite media on each of whose boundaries both temperature and heat flow are constant.

研究分野：偏微分方程式論

キーワード：複合媒質 伝送条件 優決定問題 中性導体 近似中性導体 同心球 コンフォーカル楕円体 伝送問題

様式 C-19、F-19-1、Z-19、CK-19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

次の2つの互いに関連する背景があった。

(1) 3次元空間が等方的な媒質で満たされている場合、同心球からなる2相複合体によって、外部の様な電場に全く影響を与えない中性導体が構成されることは論文: Z. Hashin, J. Appl. Mech. 29 (1962), 143-150; Z. Hashin, S. Shtrikman, J. Appl. Phys. 33 (1962), 3125-3131 によって知られていた。また、3次元空間が非等方的な媒質で満たされている場合、同心球をコンフォーカル楕円体に置き換えれば中性導体が構成されることを論文: M. Kerker, J. Opt. Soc. Am. 65 (1975), 376-379 が示した。そこで、中性導体は同心球やコンフォーカル楕円体やそれぞれの合併に限られるかという問題、つまり、中性導体による同心球およびコンフォーカル楕円体の特徴付けの問題が生じていた。この問題に部分的に初めて答えたのが、代表者の共著論文: H. Kang, H. Lee and S. Sakaguchi, An over-determined boundary value problem arising from neutrally coated inclusions in three dimensions, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (5) 16 (2016), pp. 1193-1208 であり、同心球の特徴付けが与えられた。ここでは、過度境界条件を伴う楕円型優決定問題に帰着する新しい方法が導入された。しかし、コンフォーカル楕円体の特徴付けは未知であった。

(2) Serrin の有名な過度境界値問題の解の球対称性の定理 (J. Serrin, Arch. Rational Mech. Anal., 43 (1971), 304-318) は単一媒質上の楕円型優決定問題を扱っていて、過度境界条件による球の特徴付けを与えていた。そこで、単一媒質を複合媒質に置き換えて同様な楕円型優決定問題を考察したときに、過度境界条件による同心球の特徴付けが得られるかどうかという問題を代表者が提案した。Serrin に代表される単一媒質上の様々な Serrin 型楕円型優決定問題には様々な方法が確立されているのに対し、この新しい問題は既存の方法の単なる適用からは解決されないことが観察されていた。その困難さは複合媒質の媒質間の界面上での伝導率の不連続性およびそれに伴う伝送条件から派生していた。伝送条件が鍵になることが予想されていた。

2. 研究の目的

本研究の目的は、複合媒質上の媒質間の界面上での伝送条件に着目して、複合媒質上の優決定問題の解の幾何学的特性(解の対称性等)を明らかにすることであり、研究開始当初の背景に対応させると主な目的は次の2つであった。

(1) 複合媒質特有の中性導体の特徴付けの問題および、特に困難なコンフォーカル楕円体の特徴付けの問題に挑戦する。

(2) 今まで主に単一媒質上のラプラス作用素に対して研究されてきた様々な優決定問題(過度境界条件を伴う Serrin 型楕円型境界値問題等)を複合媒質上で考察し、これらの優決定問題において自然に予想される解の幾何学的特性が得られるかどうかを明らかにする。

3. 研究の方法

様々な機会を利用して、国内外の研究協力者との討論・情報交換および関連する様々な研究会での情報収集により研究を進めた。特に、目的(1)については主に H. Kang 氏(大韓民国・Inha 大学・教授)および X. Li 氏(中華人民共和国・浙江工業大学・准教授)との共同研究を実施した。目的(2)については主に L. Cavallina 氏(東北大学・博士研究員)および R. Magnanini 氏(イタリア・フィレンツェ大学・教授)との共同研究を実施した。時系列で主なイベントを列記すると次のようになる。

(1) 2016年7月19日から7月26日まで H. Kang 氏を東北大学大学院情報科学研究科へ招聘し、中性導体の特徴付けの問題について集中的に討論・情報交換を行なった。

(2) 2016年11月17日と18日に H. Kang 氏を東北大学大学院情報科学研究科へ招聘し、討論・情報交換を行なった。

(3) 2017年2月14日から2月19日にかけて代表者が大韓民国 Inha 大学を、H. Kang 氏と中性導体の特徴付けの問題について集中的に討論・情報交換を行なった。

(4) 2017年11月28日から12月4日にかけて代表者が大韓民国 Inha 大学を訪問し、H. Kang 氏と中性導体の特徴付けの問題について集中的に討論・情報交換を行なった。

(5) 2018年3月25日から3月31日にかけて代表者が大韓民国 Inha 大学を訪問し、H. Kang 氏と中性導体の特徴付けの問題について集中的に討論・情報交換を行なった。特にコンフォーカル楕円体の特徴付けの問題において、ニュートンポテンシャル・調和関数とコンフォーカル楕円体との密接な関係について共同研究を行った。コンフォーカル楕円体を含む領域上の任意の

調和関数が満たす平均値定理に類似した性質が問題の本質を捉えているのではないかとの予想に達した。

(6)2018年7月22日から8月4日にかけて X. Li 氏, 7月30日から8月1日に H. Kang 氏を東北大学大学院情報科学研究科へ招聘し, 研究課題に深く関係する近似中性導体の存在について集中的に討論・情報交換を行い, 空間が2次元の場合の共著論文を執筆した。

(7)2018年9月9日から9月14日まで代表者が ICMAT 研究所に D. Peralta-Salas 氏を訪問, 引き続き9月15日から9月20日まで代表者がフィレンツェ大学に R. Magnanini 氏を訪問し, 中心課題である「複合媒質に関わる優決定問題」に関連する2つの課題(複合媒質上の不変等温面・不変等熱流面の問題, 複合媒質上の伝送条件を伴う極小曲面の Bernstein 型優決定問題)について討論・情報交換を行った。

(8)2018年10月28日から11月9日にかけて X. Li 氏, 11月6日から11月11日にかけて H. Kang 氏を東北大学大学院情報科学研究科へ招聘し, 集中的に研究課題の中の特に3次元空間内の近似中性導体の存在について討論・情報交換を行ない, 空間が3次元の場合の共著論文の執筆に取り掛かった。

(9)2019年1月24日から1月30日にかけて代表者が大韓民国 Inha 大学を訪問し, H. Kang 氏および同時期に招聘された X. Li 氏も交えて空間が3次元の場合の共著論文の執筆を続けた。

(10)全期間を通じて, 必要に応じて, 国内外での研究集会等に参加し, 多くの研究協力者との討論・情報交換および様々な情報収集を行なった。

4. 研究成果

主な研究成果は次のようである。

(1) 3次元空間において, 外部の様な電場に全く影響を与えない中性導体の特徴付けの問題は外部が等方的媒質の場合には既に共著論文: H. Kang, H. Lee and S. Sakaguchi, An over-determined boundary value problem arising from neutrally coated inclusions in three dimensions, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (5) 16 (2016), pp. 1193-1208, において中性導体としての同心球の特徴付けが得られていたが, その証明を見直すことによって, その定理における介在物の単連結性の仮定は不要であることが新たにわかった。例えばトーラスの内部の領域やトーラスにハンドルを任意個数つけて得られる閉曲面の内部の領域を定理の扱う領域の範疇に含めても中性導体は同心球に限ることがわかった。(図書①の第7章に記載)

(2) 単一媒質について研究されてきた Serrin 型楕円型優決定問題の一般化としての複合媒質に関する Serrin 型2相楕円型優決定問題を考え, 境界が球面である場合には介在物も球に限り, 複合媒質は同心球でなければならないことを示した。(雑誌論文①の第5章に記載)

(3) 複合媒質に関する Serrin 型2相楕円型優決定問題は単一媒質について研究されてきた Serrin 型楕円型優決定問題と異なり, 同心球でない領域が同心球を微小摂動することによって構成できることを Banach 空間における陰関数定理および球面調和関数の理論を用いて証明した。(学術雑誌に投稿中の論文:L. Cavallina, R. Magnanini and S. Sakaguchi, Two-phase heat conductors with a surface of the constant flow property, arXiv:1801.01352v2 の第2章に記載) これは, 研究開始当初の背景(2)および対応する研究目的(2)に照らし合わせて, 単一媒質と複合媒質の決定的な違い, つまり複合媒質の場合は単一媒質の場合と異なり対称性破壊が起こることを示すものであって, 当初予期していない新たな知見が得られたものである。

(4) 2相複合体に対するねじれ弾性問題の形状最適化問題における同心球形状の安定性の詳細な解析を形状微分および球面調和関数の理論を用いて行なった。(雑誌論文②に記載)

(5) 2次元空間において, 外部が等方的媒質の場合同心円で構成される2相導体で外部の様な電場に全く影響を与えない中性導体が古くから構成されていたが, 外部の様な電場への影響の少ない非対称な無限個の近似中性導体がこの同心円を微小摂動することによって構成できることを Banach 空間における陰関数定理とフーリエ解析を用いて初めて証明した。(学術雑誌に投稿中の論文: H. Kang, X. Li and S. Sakaguchi, Existence of coated inclusions of general shape weakly neutral to multiple fields in two dimensions, arXiv:1808.01096v1 に記載) 近似中性導体のこのような存在とその証明法は当初予期していない新たな知見である。なお, 3次元空間における対応する問題についても Banach 空間における陰関数定理と球面調和関数の理論を用いて近似中性導体の存在証明が可能であることがわかり共著論文を執筆中である。

5. 主な発表論文等

[雑誌論文] (計 2 件)

① Shigeru Sakaguchi, Two-phase heat conductors with a stationary isothermic surface and their related elliptic overdetermined problems, 数理解析研究所講究録別冊, 査読有, 2019年, 印刷中

② Lorenzo Cavallina, Stability analysis of the two-phase torsional rigidity near a radial configuration, Applicable Analysis, 査読有, 2019年, 印刷中,

DOI: 10.1080/00036811.2018.1478082

[学会発表] (計 2 件)

① Shigeru Sakaguchi, A survey on stationary isothermic surfaces and their related problems, ICMAT Special Colloquium, 2018 年

② Shigeru Sakaguchi, Two-phase heat conductors, stationary isothermic surfaces and surfaces with the constant heat flow property, Colloquium at Inha University, 2017 年

[図書] (計 1 件)

① 坂口 茂, サイエンス社, 偏微分方程式の解の幾何学, 2017 年, 112 ページ

[その他]

ホームページ等

<http://researchmap.jp/sigersak2012415/>

6. 研究組織

(2) 研究協力者

研究協力者氏名 : カヴァッリーナ ロレンツォ

ローマ字氏名 : CAVALLINA, Lorenzo

※科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。