

令和元年6月18日現在

機関番号：12613

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2016～2018

課題番号：16K13773

研究課題名（和文）マリアバン解析を用いた新しい高次離散化法

研究課題名（英文）New higher order discretization method with Malliavin calculus

研究代表者

山田 俊皓 (Yamada, Toshihiro)

一橋大学・大学院経済学研究科・准教授

研究者番号：50754701

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 1,900,000円

研究成果の概要（和文）：本研究では、ブラウン運動で駆動する確率微分方程式に対する弱近似法の構成を行い、結果としてブラウン運動の多項式ウェイトによる新しい高次離散化法（マリアバン・モンテカルロ）を得た。また、通常の弱近似の問題だけでなく、偏微分方程式の解の微分に対して高次離散化を行う方法も提案した。さらに副産物としてマルコフ連鎖による新しい近似法を提案し、数理的・数值的に機能することを確認している。これらの一連の研究成果は、数値解析・統計学・ファイナンス分野などの応用数学の主要ジャーナルに掲載された。

研究成果の学術的意義や社会的意義

自然科学・社会科学においてランダムな微分方程式によるモデルは頻繁に現れ、さらにそれらのモデルの対象の平均的な振る舞いや確率計算は明らかにしたい現象を解析する上で本質的に重要である。モデルが単純であれば解析を行うことは簡単であるが、一般にはモデルは複雑になりうる。それは自然科学・社会科学の問題が単純でなく複雑だからである。本研究の成果はこのような問題に寄与しうる。従来のシミュレーション法は収束が遅いが、本研究の方法ではマリアバン解析を用いた補正を加えるので収束が非常に速くなり、また感覚的にも分かりやすい。物理現象の解析、機械学習、金融商品の数値計算やリスク管理など多くの分野への応用が期待される。

研究成果の概要（英文）：In the project, we studied weak approximation schemes for stochastic differential equations driven by Brownian motions. As a result, we obtained a new higher order algorithm, the Malliavin Monte Carlo, which is constructed by some polynomials of Brownian motions through the Malliavin calculus. Not only for the standard weak approximation problem, a higher order discretization scheme for the differentiations of the solutions to partial differential equations is also obtained. We further provide another type of weak approximation using a Markov chain approximation. These results are published in major academic journals in the areas of applied mathematics such as numerical analysis, statistics and finance.

研究分野：確率数値解析

キーワード：マリアバン解析 確率微分方程式 弱近似

1. 研究開始当初の背景

理論・応用分野において確率微分方程式を用いた数理モデルは複雑性を増しており、特に近年金融機関で用いる確率モデルは複雑化の一途を辿っている。それに伴い確率微分方程式に対する数値計算法の高度化へのニーズは理論・応用ともに一層増してきた。

このような背景の下、複雑な確率微分方程式に対する高速な数値計算法として、解析的近似が脚光を浴びてきた。解析的近似への関心は世界的にも広がり、海外の数多くの研究者が参入して競争的かつホットな研究分野となったが、一方で解析的近似の限界として「近似の粗さ」の問題があった。これは解析的近似を扱う上では避けられない短所であるが、解析的近似が高速計算を実現するという長所も捨てたくない。

研究代表者は、これまでに確率微分方程式に対する解析的近似の研究を行い、Takahashi and Yamada, *A weak approximation with asymptotic expansion and multidimensional Malliavin weights*, *Annals of Applied Probability* (2016) の研究成果において、解析的近似を用いて確率微分方程式の離散化を行う方法を得た。

上記の論文は、解析的近似に重きを置いたものであり離散化を「解析的近似の補正」のように扱うものであるが、より離散化法に特化させた方法、すなわち確率微分方程式の高次離散化法を構築することもありえるだろう。これが構築できれば、従来の高次離散化と異なる形のものが出る。解析的近似の長所を残しつつ短所を是正し、新しい高次離散化法を構築することが本研究のモチベーションである。

2. 研究の目的

「マリアバン解析を用いた新しい高次離散化法」の研究を行い、確率解析学や数理ファイナンスの数値的諸問題に貢献しうる新しい方法を提供することを目的としている。マリアバン解析の強力な理論を援用して新しい高次の離散化法（弱近似）を構成し、効率的に数値計算を行うことが主たるテーマである。

本研究で目指す方法はある種の作用素分解法であるが、東京大学の楠岡名誉教授による「楠岡近似」やオックスフォード大学のライオン教授 (T.Lyons) らによる「ウィーナー空間上の立体求積法」等の確率論の分野で提唱されているその他の高次の離散化法とはアルゴリズムが異なるものを構成する。

3. 研究の方法

まず確率微分方程式の解に対して、伊藤の公式とマリアバンの部分積分公式を繰り返し用い、確率微分方程式の解の期待値の短時間における有効な近似となる局所近似を得る。そして、局所近似の積み上げによって、確率微分方程式の新しい高次の離散化、すなわち弱近似法を構成する。

局所近似を計算する際には解析的近似の考え方をを使うが、通常行うような解析的近似の数値計算法を使わずにあえて乱数生成による計算、すなわちモンテカルロ・シミュレーションを行うことがポイントである。複数回の離散化に対して局所近似の積み上げをまとめて計算を行うには、その方が高次元の問題（計算複雑性問題）を回避できるので都合が良い。

また、局所近似を構成する際に通常解析的近似で行うような近似展開の並びをあえて入れ替えて余分なものは切り捨て、計算コストを削減するアルゴリズムを組む。この点を理論的に正当化する際にもマリアバン解析を全面的に用いる。これにより、高次離散化の目的にあった方法を構成することが可能となる。

構成した離散化法を様々な数理モデルに適用し、精度検証・他の方法との比較などを数値的に行う。

4. 研究成果

いわゆるスタンダードな方法として知られる「オイラー・丸山法（一次近似）」より精度の良い二次近似を新しく考案し、一連の研究が *Journal of Computational and Applied Mathematics*, *Quantitative Finance* に公開された。研究当初は二次近似を構成することが目的であったが、より高いオーダーの近似の計算法と計算コストを削減するからくりを編み出し、最終的な結果として任意のオーダーの離散化法とアルゴリズム（マリアバン・モンテカルロ）を実現した。テスト関数が不連続になるような関数の滑らかさがなく数学的に扱いにくいケースの離散化についても、マリアバン解析の方法を利用することによってテスト関数の滑らかさを持つときと同様に統一的に扱えることを正当化した。すなわち、設定に依らずユニバーサルに機能する計算法を提供した。具体的な数値計算プログラムを実行する際の利点としては、確率微分方程

式のランダムネスの元となるブラウン運動の個数と離散化ごとに必要な乱数の数が同じであることが挙げられる。通常の高次近似を構成しようとした場合、乱数の数がブラウン運動の個数より増えていくが、本研究の方法は任意のオーダーの離散化を構成してもその問題は生じない。つまり、乱数生成のコストは一定に保つことができる。これは任意のオーダーであっても、オーダーに応じたブラウン運動の多項式を増やせばよいからである。ブラウン運動の多項式ウエイトによるモンテカルロ法により実装するアルゴリズムを提示した。数値実験において既存の方法との比較等を行い、本方法の優位性を確認した。この研究結果は、SIAM Journal on Numerical Analysisに掲載された。

また、当初想定していた通常の弱近似の問題だけでなく、偏微分方程式の解の空間変数の微分のような非常に扱いにくい対象に対しても、高次離散化を行う方法を構成できることが明らかになった。偏微分方程式の解の近似に比べ解の空間変数の微分の近似は難易度が格段に増すが、マリアバン解析によるブラウン運動の多項式ウエイトのアプローチを用いることで、この問題を解くことを可能にした。これにより、期待値だけでなく期待値のパラメータ感応度も高速・高精度に近似できるようになった。重要なポイントは、偏微分方程式の解の空間変数の微分を確率論的に見るために、ピスマュー・エルワージー・リー公式と呼ばれる確率積分を含む期待値の形で捉えて、これの作用素分解を行うことである。離散化を構成するためには分解した作用素一つ一つを近似することが重要なステップとなるが、従来の方がこれを実現するのが困難であるのに対して、マリアバン解析によるブラウン運動の多項式ウエイトのアプローチはこの点をオートマチックに達成できる。そして、この方法においても乱数の数がブラウン運動の個数と同じであり、通常の弱近似の問題と同様に乱数生成のコストは抑えられる。数値実験では、ファイナンスの実務モデルに対してパラメータ感応度の計算を行い、高次離散化を達成していることを確認した。この結果は、SIAM/ASA Journal on Uncertainty Quantificationに掲載された。

さらに副産物としてマルコフ連鎖による新しい弱近似法を提案し、数理的・数値的に機能することを確認している。これはブラウン運動の多項式ウエイトのアプローチの亜種のようなものであるが、得られた確率微分方程式の数値計算法としては、よく知られたミルシュタイン近似やタレイ近似の拡張と言えるものになっている。本方法ではベクトル場のリー括弧積による補正項が現れる。この点が特にタレイ近似と異なるが、この補正項の影響により乱数の数とブラウン運動の個数を同じにすることができ、計算コスト削減の観点でタレイ近似にない利点を得る。この成果は、Monte Carlo Methods and Applicationsに掲載された。

5. 主な発表論文等

[雑誌論文](計 6 件)

- (1) (査読有) [Toshihiro Yamada](#), An arbitrary high order weak approximation of SDE and Malliavin Monte Carlo: analysis of probability distribution functions, SIAM Journal on Numerical Analysis, 57 巻 02 号 563-591 頁 2019 年 DOI: 10.1137/17M114412X
- (2) (査読有) [Toshihiro Yamada](#) and Kenta Yamamoto, Second order discretization of Bismut-Elworthy-Li formula: application to sensitivity analysis, SIAM/ASA Journal on Uncertainty Quantification, 7 巻 01 号 143-173 頁 2019 年 DOI : 10.1137/17M1142399
- (3) (査読有) [Toshihiro Yamada](#) and Kenta Yamamoto, A second-order weak approximation of SDEs using Markov chain without Levy area simulation, Monte Carlo Methods and Applications, 24 巻 04 号 289-308 頁 2018 年 DOI:10.1515/mcma-2018-2024
- (4) (査読有) [Toshihiro Yamada](#) and Kenta Yamamoto, A second order discretization with Malliavin weight and Quasi-Monte-Carlo method for option pricing, Quantitative Finance (Online First), 2018 年 DOI : 10.1080/14697688.2018.1430371
- (5) (査読有) [Toshihiro Yamada](#), A weak approximation with Malliavin weights for local stochastic volatility model, International Journal of Financial Engineering, 4 巻 1 号 1750002 1-17 頁 2017 年 DOI: 10.1142/S2424786317500025
- (6) (査読有) [Toshihiro Yamada](#), A higher order weak approximation scheme of multidimensional stochastic differential equations using Malliavin weights, Journal of Computational and Applied Mathematics, 321 巻 September 2017 号 427-447 頁 DOI : 10.1016/j.cam.2017.03.001

〔学会発表〕(計 7 件)

- (1) Toshihiro Yamada, Second order discretization of Bismut-Elworthy-Li formula and applications (Stochastic Processes and Related Topics) 2019年02月 関西大学
- (2) Toshihiro Yamada, Second order discretization of Bismut-Elworthy-Li formula: application to sensitivity analysis (一橋大学経済統計ワークショップ) 2018年12月 一橋大学
- (3) Toshihiro Yamada, Higher order discretization methods using Malliavin Monte Carlo and Brownian Markov chain without Levy area simulation (WORKSHOP ON "MATHEMATICAL FINANCE AND RELATED ISSUES") 2018年03月 大阪大学
- (4) Toshihiro Yamada, Weak Milstein scheme without commutativity condition and its sharp asymptotic error bound (一橋大学経済統計ワークショップ) 2017年11月 一橋大学
- (5) Toshihiro Yamada, A second order discretization method for the Delta (Osaka-UCL Workshop on Stochastics, Numerics and Risk) 2017年03月 大阪大学
- (6) Toshihiro Yamada, A general formula for weak approximation with multidimensional Malliavin weights: application to option pricing (一橋大学経済統計ワークショップ) 2016年10月 一橋大学
- (7) Toshihiro Yamada, On higher order weak approximation with Malliavin weights (一橋大学 ICS FS ファカルティセミナー) 2016年07月 一橋大学

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。