

科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 2 年 6 月 28 日現在

機関番号：32613

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2016～2019

課題番号：16K17602

研究課題名(和文)ポアンカレ不等式と距離空間の幾何学

研究課題名(英文)Poincare inequalities and geometry of metric spaces

研究代表者

豊田 哲 (Toyoda, Tetsu)

工学院大学・教育推進機構(公私立大学の部局等)・准教授

研究者番号：50599701

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,800,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では、「CAT(k)空間へ等長埋め込み可能な距離空間を特徴付けよ」という未解決問題に対する部分的な結果として、高々5点からなる距離空間がCAT(0)空間へ等長埋め込み可能であることは、その距離空間上で「重み付き4点不等式」が成立することと同値であることを証明した。さらに、M. Gromovが導入したCycl_n(k)条件という、距離空間がCAT(k)空間へ等長埋め込み可能であるための必要条件に対して、「Cycl₄(k)条件は4以上の任意の整数nに対するCycl_n(k)条件を導く」ということを証明した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

さまざまな距離空間上でどのような不等式が成立するかということが、広く重要な課題となっている。本研究では、CAT(k)空間(誤解を恐れず簡単に言うならば、曲率がk以下の距離空間)において成立する不等式について研究を行った。その結果、5点からなる距離空間がCAT(0)空間へ等長埋め込み可能であることは、その距離空間上で重み付き4点不等式と呼ばれる不等式が成立することと同値であることを証明した。これは、「CAT(0)空間へ等長埋め込み可能な距離空間を特徴付けよ」という未解決問題に対する部分的結果を与えるものといえる。

研究成果の概要(英文)：To find a characterization of those metric spaces that admit an isometric embedding into a CAT(k) space is a longstanding open problem stated by M. Gromov and others. We proved that a metric space admits an isometric embedding into a CAT(0) space if and only if it satisfies the weighted quadruple inequalities.

On the other hand, among all geodesic metric spaces, CAT(k) spaces can be characterized by various simple conditions. The Cycl₄(k) condition introduced by Gromov is one of such conditions. We studied the geometry of (possibly non-geodesic) metric spaces satisfying this condition, and proved that the Cycl₄(k) condition implies the Cycl_n(k) conditions for all integers n greater than four.

研究分野：幾何学

キーワード：CAT(0)空間 距離空間 等長埋め込み 二次距離不等式

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

近年発展の著しい幾何学的群論や距離空間の幾何学においては、距離空間上のポアンカレ不等式と呼ばれる不等式が多くの場合で登場し、そこにあらわれる最適の定数(非線形スペクトルギャップと総称される)の計算・評価が重要な課題となっている。特に、CAT(0)空間と呼ばれる非正曲率性を持つ距離空間における非線形スペクトルギャップの評価・計算を行うことは重要な課題である。CAT(0)空間上のポアンカレ不等式の研究においては、目的のポアンカレ不等式をCAT(0)空間上で成立するより基本的な不等式に帰着させることが従来の一つの基本的なアプローチであるといえる。しかし、CAT(0)空間上で成立する多くの既知の不等式では、CAT(0)空間が測地的であるという条件を十分に捉えることができていないことが、この方法によってCAT(0)空間上のポアンカレ不等式を研究する上での根源的な課題といえる。実際、CAT(0)空間へ等長埋め込み可能な距離空間を不等式のみを使って特徴づけること自体、M. Gromov らにより提示された大きな未解決問題である。

2. 研究の目的

本研究の目的は、距離空間上のポアンカレ不等式に関する最適の定数(いわゆる非線形スペクトルギャップ)の計算・評価を行うこと、また非線形スペクトルギャップの計算・評価を行う上で必要になる、距離空間(特に非正曲率性を持つ距離空間)の幾何学に関する問題を解決し、距離空間の幾何学に対する理解を深めることである。より具体的な目標としては、非線形スペクトルギャップの計算・評価に関しては、「距離空間 X, Y のペアで、 X に関する非線形スペクトルギャップが常に Y に関するものの $(X, Y$ のみに依存する) 定数倍以下になるようなものを特徴付けよ。」、「 A_n 型ビルディングの 1-骨格の CAT(0) 空間に関する Wang の不変量は常に $1/2$ 以上か?」という二つの基本的な未解決問題の解決を目指す。さらに、これらの課題に向かう中で生じる距離空間の幾何学に関する多くの基本的な問題に取り組む。特に、上で述べた CAT(0)空間に等長埋め込み可能である距離空間を不等式のみを使って特徴づけるという未解決問題に取り組みたい。

3. 研究の方法

非線形スペクトルギャップの計算・評価に関する現状を打開するには本質的に新しい方法を開発する必要がある。「距離空間 X, Y のペアで、 X に関する非線形スペクトルギャップが常に Y に関するものの $(X, Y$ のみに依存する) 定数倍以下になるようなものを特徴付けよ」という問題に対しては、 Y がヒルベルト空間である場合に関しては、報告者自身の先行研究と A. Naor による先行研究がある。それらを踏まえると「距離空間 X が Y へ擬等長埋め込み可能であるならば、 X に関する非線形スペクトルギャップが常に Y に関するものの定数倍以下になる」ことが予想される。この予想を解決することを中間的な目標としたい。上で述べた二つの先行研究における証明は、ヒルベルト空間の特殊性が用いられており、擬等長埋め込み可能という条件は前面に出てきていない。これらの先行研究に対して、擬等長埋め込み可能という条件を前面に押し出した別証明を与えることが、この予想の解決に向けた第一歩となると考えられる。また、考える CAT(0)空間を具体的な空間に限定すると、非線形スペクトルギャップの計算に対して、数値計算によるアプローチを行うことが可能になると考えられる。そこで、応用上重要ないくつかの具体的な CAT(0)空間に対して、数式処理ソフト Mathematica を用いていくつかの幾何学的不変量を計算することで非線形スペクトルギャップの評価を行いたいと考えている。また、すでに述べたように、CAT(0)空間上のポアンカレ不等式の研究においては、目的のポアンカレ不等式をCAT(0)空間上で成立するより基本的な不等式に帰着させることは従来の基本的なアプローチの一つであるが、多くの既知の不等式ではCAT(0)空間が測地的であるという条件を十分に捉えられていないことがその際の課題になっているように考えられる。この課題を解決するためには、M. Gromov によって導入された、CAT(0)空間上で成立する Wir_n 不等式、および $Cycl_n(0)$ 性質と呼ばれる CAT(0)空間の部分集合を持つ性質に注目して、CAT(0)空間の部分集合を持つ既知の性質の間の関係を明らかにしていくことが有望なアプローチになると考えている。

4. 研究成果

「高々5点からなる距離空間がCAT(0)空間へ等長埋め込み可能であるための必要十分条件は重み付き4点不等式を満たすことである」という定理を証明した。この定理は「CAT(0)空間へ等長埋め込み可能な距離空間を特徴づけよ」という未解決問題に対する最初の意味のある部分的結果といえる。また、この定理を証明するにあたって、一般のグラフ G に対し、M. Gromov が導入した $Cycl_n(0)$ 条件を一般化した $G(0)$ 条件を定義し、「距離空間がCAT(0)空間へ等長埋め込み可能であるための必要十分条件は全てのグラフ G に対して $G(0)$ 条件を満たすことである」という事実を証明した。これは上記の未解決問題に対する新しいアプローチを提供するものといえる。 k を実数とする。CAT(k)空間へ等長埋め込み可能な距離空間を特徴づけることが未解決である一方で、距離空間が測地的であるという(非常に強い)条件の下では、距離空間がCAT(k)空間であることと同値になる多くの条件が知られている。 $Cycl_4(0)$ 条件はその一つである。本研究では、測地的であるという仮定をしないで、 $Cycl_4(0)$ 条件を満たす距離空間がどのような幾何学的性質を持つのか研究を行った。その結果、「任意の実数 k に対して、 $Cycl_4(k)$ 条件は

4 以上の全ての整数 n に対する $\text{Cycl}_n(k)$ 条件を導く」という定理を証明した。この定理は、Gromov が論文中で推測している内容に反するものであり、 $\text{CAT}(k)$ 空間の部分集合の持つ性質として「 $\text{Cycl}_4(k)$ 条件を満たす」ということが予期されていた以上に重要なものであるということを示唆している。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計1件（うち査読付論文 1件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Kondo Takefumi, Toyoda Tetsu, Uehara Takato	4. 巻 195(1)
2. 論文標題 On a question of Gromov about the Wirtinger inequalities	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Geometriae Dedicata	6. 最初と最後の頁 203-214
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） https://doi.org/10.1007/s10711-017-0284-3	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計13件（うち招待講演 12件 / うち国際学会 1件）

1. 発表者名 豊田 哲
2. 発表標題 \$Cycl_n\$ (\$\kappa\$) 性質について
3. 学会等名 淡路島幾何学研究集会2020（招待講演）
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 豊田 哲
2. 発表標題 距離空間の非正曲率性を特徴付ける不等式について
3. 学会等名 早稲田双曲幾何幾何学的群論セミナー（招待講演）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 豊田 哲
2. 発表標題 TLD, TSDな4点とCAT(0)空間の構成
3. 学会等名 淡路島幾何学研究集会2019（招待講演）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 豊田哲
2. 発表標題 CAT(0)空間上で成立する不等式について
3. 学会等名 Year-End workshop on geometry, topology and related topics in Kagoshima (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 豊田哲
2. 発表標題 Gromovの $Cycl_4(0)$ 条件とCAT(0)空間
3. 学会等名 首都大学東京・幾何学セミナー (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Tetsu Toyoda
2. 発表標題 An intrinsic characterization of five points in a CAT(0) space
3. 学会等名 Rigidity School (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 豊田哲
2. 発表標題 CAT(0)空間上で成立する不等式について
3. 学会等名 北九州数理科学セミナー (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 豊田哲
2. 発表標題 Gromovの $\text{Cycl}_k(0)$ 条件の一般化とCAT(0)空間の5点部分集合の内在的特徴付け
3. 学会等名 日本数学会2018年度年会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 豊田哲
2. 発表標題 CAT(0)空間の5点部分集合の内在的特徴付け
3. 学会等名 淡路島幾何学研究集会2018 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 豊田哲
2. 発表標題 Inequalities implied by the weighted quadruple inequalities
3. 学会等名 北九州幾何学研究集会2017 (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 豊田 哲
2. 発表標題 非正曲率性と距離の平方に関する不等式
3. 学会等名 淡路島幾何学研究集会2017 (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 豊田 哲
2. 発表標題 距離と不等式
3. 学会等名 第2回摂南大学数理セミナー（招待講演）
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 豊田 哲
2. 発表標題 距離空間上のWirtinger不等式について
3. 学会等名 広島幾何学研究集会 2016（招待講演）
4. 発表年 2016年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考