

科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和元年6月21日現在

機関番号：32634

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2016～2018

課題番号：16K17646

研究課題名(和文) Halin graphについての研究

研究課題名(英文) On Halin graphs

研究代表者

土屋 翔一 (Tsuchiya, Shoichi)

専修大学・ネットワーク情報学部・准教授

研究者番号：10647564

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,700,000円

研究成果の概要(和文)：本研究は、主に、特定のグラフクラスに対して、全域Halin graphの存在を保証する定理を証明することを目標として研究を進めた。平面三角形分割については、5-連結性を仮定しても全域Halin graphの存在性が保証できない無限系列が存在することがわかった。一方、禁止部分グラフを用いて全域Halin graphの存在性を保証するための定理を証明することができた。これにより、自明でないグラフクラスにおいて、全域Halin graphの存在性を保証する初の定理が得られた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

グラフ理論では、木や閉路について多くの成果が発表されている。Halin graphの研究は木と閉路によって構成される構造について議論するため、木の研究と閉路の研究を結び付ける新たな研究が創生できる。そのような意味で、本研究は学術的に意義がある。また、辺の数の少ない連結度の高いグラフは、コストを抑えた強度の高い構造と関連があるため、応用面に活用することも可能である。

研究成果の概要(英文)：In this research, we aimed to obtain theorems for the existence of a spanning Halin subgraph. For plane triangulations, we proved that there exists an infinite family of 5-connected plane triangulations without a spanning Halin subgraph. On the other hand, we obtained a theorem on forbidden subgraphs which guarantees the existence of a spanning Halin subgraph. This result is the first positive result for the existence of a spanning Halin subgraph in non-trivial graph classes.

研究分野：グラフ理論

キーワード：Halin graph HIST fullerene graph plane graph tree

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

グラフ理論には様々な応用があり、ネットワークの構築や道路網の設計なども幅広い応用の一部である。そのような応用において、コストを抑えつつ、強度を高めることは重要な課題であり、古くから「辺極小な連結度の高いグラフの構成・及びその性質の解明」をテーマとして Tutte などが研究を進展させてきた。彼らの研究に触発された Halin は、自身もそのようなテーマの研究を行い、その中で、どの 1 辺を取り除いても連結度の下がる 3-連結グラフの例として Halin graph を構成した。Halin graph $H = T \cup C$ とは、次の条件を満たすグラフである。

- (1) H は平面グラフ、
- (2) T は次数 2 の頂点を持たない H の全域木、かつ
- (3) C は T の次数 1 の頂点を全て通る閉路。

本研究の開始当初、Halin graph の持つ性質に関する研究は様々なものがあつた。例えば、任意の Halin graph が Hamilton 閉路を持つことや Hamilton connected であることなどが示されていた。一方、全域 Halin graph を持つための十分条件については、肯定的な研究成果が得られていなかった。例えば、1975 年に Lovász と Plummer がたてた「任意の 4-連結平面三角形分割は全域 Halin graph を持つ。」という予想も、2015 年の申請者たちの研究成果によって反例が無数に存在することがわかるという状況であつた。

2. 研究の目的

情報科学の分野では、コストを抑えつつ強度の高いネットワークを構築することは重要な課題の 1 つである。この課題は、グラフ理論の中でも古くから考えられている「辺数が少なく、連結度の高いグラフを構成する。」という問題に対応している。この問題は、Tutte などの著名な研究者たちが進展させてきた。そうした流れの中、Halin はどの 1 辺を取り除いても連結度が下がる 3-連結グラフの例として、Halin graph を構成した。後に Halin graph は様々な性質を満たすことや豊富な応用用途があることがわかり、現在では興味深い研究対象となっている。本研究では、これまでの研究で肯定的な成果が得られていなかった「与えられたグラフが全域 Halin graph を持つための条件の解明」を軸に包括的に研究に取り組んだ。この問題が肯定的に解決できた場合、すなわち、特定のグラフクラスで全域 Halin graph の存在性が保証できた場合、既存の Halin graph の研究成果を用いて、そのクラスに属するグラフが満たす性質を保証できることが多々ある。例えば、Halin graph は Hamilton 閉路を持つことが示されているため、全域 Halin graph の存在性を保証することにより、Hamilton 閉路の存在性を保証することができる。そのため、本研究の目的が達成できれば、新しい定理や既存定理の別証明を得ることにつながる。

3. 研究の方法

本研究は、主に、特定のグラフクラスに対して、全域 Halin graph の存在を保証する定理を証明することを目標として研究を進めた。具体的には、全域 Halin graph の存在を阻害する部分構造を列挙し、それらの部分構造を制限するために必要となる条件を精査した。その後、それらの条件下で、全域 Halin graph の存在性を保証できるかを検討した。あるグラフクラスに対して、肯定的な結論が得られた場合は、さらにそのグラフクラスをどこまで緩和できるかを考え、より強力な定理を得ることを目指した。反対に否定的な結論が得られた場合は、その成果を考察することにより全域 Halin graph の存在を阻害する新しい部分構造の発見ができるため、それをもとに研究を進展させることができた。

4. 研究成果

平面三角形分割については、5-連結性を仮定しても全域 Halin graph の存在性が保証できない無限系列を構成することができた。この成果は、本研究の目的に対して否定的なものであつたが、研究開始当初はつかめていなかった、全域 Halin graph の存在を阻害する新しい構造の発見につながつた。

一方、3-連結 $\{P_5, K_{1,3}\}$ -free graph について全域 Halin graph の存在性を保証するための定理を証明することができた。これにより、自明でないグラフクラスにおいて、全域 Halin graph の存在性を保証する最初の定理が得られた。この成果を得た際に、 P_5 -free や $K_{1,3}$ -free という条件を P_6 -free や $K_{1,4}$ -free に置き換えることができないことも示せた。さらに、3-連結 $\{B_{1,1}, K_{1,3}\}$ -free graph や 3-連結 $\{Z_2, K_{1,3}\}$ -free graph についても同様の結論を保証する定理が得られた。また、これらの定理の $B_{1,1}$ -free や Z_2 -free という条件を $B_{1,2}$ -free や Z_3 -free という条件に置き換えられる可能性があることや、その他の条件は置き換えができないこともわかつたので、今後の研究では、その部分を明らかにしていくことも計画している。

上記の成果を得る過程で、木と閉路を同時に扱うための手法を確立することができた。これにより、平面グラフ以外のクラスに対して全域 Halin graph の存在性を議論しやすくなつた。この手法をさらに改良していけば、より広いグラフクラスで全域 Halin graph の存在性を保証する定理が得られると考えている。

5 . 主な発表論文等

[雑誌論文](計8件)

1. S. Wang, S. Tsuchiya and L. Xiong, Forbidden pairs for equality of connectivity and edge-connectivity of graphs, *Graphs and Combinatorics* 35, (2019) 419-426.
2. M. Furuya and S. Tsuchiya, Monochromatic homeomorphically irreducible trees in 2-edge-colored complete graphs, *Journal of Combinatorics* 9, (2018) 681-691.
3. R. Nomura and S. Tsuchiya, Plane graphs without homeomorphically irreducible spanning trees, *Ars Combin.* 141, (2018) 157-165.
4. M. Furuya, M. Takatou and S. Tsuchiya, Distance-restricted matching extendability of fullerene graphs, *Journal of Mathematical Chemistry* 56, (2018) 606-617.
5. G. Chen, H. Enomoto, K. Ozeki and S. Tsuchiya, Plane triangulations without a spanning Halin subgraph II, *SIAM J. Discrete Math.* 31, (2017) 2429-2439.
6. G. Chen, J. Han, S. O, S. Shan and S. Tsuchiya, Forbidden pairs and the existence of a spanning Halin subgraph, *Graphs and Combinatorics* 33, (2017) 1321-1345.
7. S. Tsuchiya and T. Yashima, A degree condition implying Ore-type condition for even $[2, b]$ -factors in graphs, *Discussiones Mathematicae Graph Theory* 37, (2017) 797-809.
8. M.N. Ellingham, E.A. Marshall, K. Ozeki and S. Tsuchiya, A Characterization of $K_2, 4$ -Minor-Free Graphs, *SIAM J. Discrete Math.* 30, (2016) 955-975.

[学会発表](計10件)

1. 土屋 翔一, Large homeomorphically irreducible trees in path-free graphs, Hakata Workshop; Winter Meeting 2019, 2019年.
2. Shoichi Tsuchiya, Large homeomorphically irreducible trees in path-free graphs, 6th Pacific Workshop on Discrete Mathematics, 2018年.
3. Shoichi Tsuchiya, Construction of 4-connected triangulations on the projective plane, 8th Cracow Graph Theory Conference, 2018年.
4. 土屋 翔一, Halin graph について, 組合せ論サマースクール 2018, 2018年.
5. 土屋 翔一, 射影平面上の 4-連結三角形分割の生成定理について, 離散数学とその応用研究集会 2018, 2018年.
6. Shoichi Tsuchiya, Matching extendability of fullerene graphs, Euro Chemistry Conference 2018, 2018年.
7. Shoichi Tsuchiya, On distance matching extendability of fullerene graphs, 5th International Combinatorics Conference, 2017年.
8. 土屋 翔一, フラーレングラフの distance matching extendability について, Japanese Conference on Combinatorics and its Applications・離散数学とその応用研究集会 2017, 2017年.
9. Shoichi Tsuchiya, On fullerene graphs [招待講演], 2017 Joint Mathematics Meetings, 2017年.
10. 土屋 翔一, Fullerene graph の HIST について, 離散数学とその応用研究集会 2016, 2016年.

[その他]

ホームページ等

<https://sites.google.com/site/stuschiya/>

6 . 研究組織

(1)研究分担者

研究分担者氏名：

ローマ字氏名：

所属研究機関名：

部局名：

職名：

研究者番号（8桁）：

(2)研究協力者

研究協力者氏名：

ローマ字氏名：