

令和 2 年 6 月 22 日現在

機関番号：20103

研究種目：国際共同研究加速基金（国際共同研究強化）

研究期間：2017～2019

課題番号：16KK0005

研究課題名（和文）真軌道生成法の一般化および非線形現象の無誤差シミュレーション解析（国際共同研究強化）

研究課題名（英文）Generalization of true orbit generation methods and exact simulation analysis of nonlinear phenomena(Fostering Joint International Research)

研究代表者

斉藤 朝輝 (SAITO, Asaki)

公立はこだて未来大学・システム情報科学部・教授

研究者番号：60344040

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 6,400,000円

渡航期間： 12ヶ月

研究成果の概要（和文）：誤差の入らない新しいシミュレーション法である真軌道生成法の拡張を行った（実代数体を係数にもつ区分的1次分数写像にも適用可能にした）。また、Schroedinger方程式とも関係の深い2次元保測写像を対象に、真軌道シミュレーションを用いた解析を行い、パラメータ空間に存在する階層構造を明らかにした。さらに、真軌道を使った擬似乱数生成器に対して強固な数学的基盤を与えるため、初期点（seed）の集合がある性質（各要素が異なる代数体に所属するという性質）を持つことを証明した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

数値誤差が系の性質を本質的に壊してしまう可能性がある対象に対して、固定精度浮動小数点数を用いる従来のシミュレーション法を適用し、解析を行うのは限界がある。本研究によって、誤差のないシミュレーションを実現する真軌道生成法が、より広い力学系のクラスに対して適用できるようになった。また、2次元保測写像に関する成果は、力学系研究としての価値だけでなく、真軌道計算の有効性を確認できたという点でも意義がある。また、現代社会を支える基盤技術の1つと言える擬似乱数は、様々な応用に大量に用いられている。本研究によって、我々の真軌道擬似乱数生成器が、複数の擬似乱数列を生成する際に極めて良い性質を持つことを示せた。

研究成果の概要（英文）：We have expanded our true orbit generation method, a new simulation method without errors, to be applicable to piecewise linear fractional maps whose coefficients are real algebraic. Using true orbit simulation, we also have analyzed an area-preserving plane map which has a relation to the Schroedinger equation, and we have identified a hierarchical structure existing in the parameter space. Moreover, in order to give a firm mathematical foundation to our pseudorandom number generators using true orbits, we have proved that our sets of initial points (i. e., seeds) have a property such that each element belongs to a different algebraic number field.

研究分野：非線形科学

キーワード：真軌道計算 シミュレーション 非線形現象 2次元区分的線形保測写像 ユークリッドアルゴリズム
代数体 擬似乱数 体の不一致

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。

1. 研究開始当初の背景

- (1) 力学系の中で，計算機を使って誤差のない真軌道を十分長く生成できるのは，区分的線形写像を含む区分的1次分数写像だけだと考えられる．区分的1次分数写像の真軌道生成法は，本研究の先行研究[1-3]によって一応の完成を見たと考えていた．しかし，本研究の開始当初には，写像係数の有理数から実代数的数への拡大など，新たな発展の方向が見えてきていた．
- (2) 非線形科学や複雑系の分野には，数値誤差が系の性質を本質的に壊してしまう可能性があるにもかかわらず，これまで固定精度浮動小数点数を使ったシミュレーションを行わざるを得なかった対象が，数多く存在する．現在と同様，研究の開始当初も，このような従来の数値計算による解析では限界のある対象に対して，真軌道生成法を使ったシミュレーション解析を推し進めることにより，研究の進展が期待できた．
- (3) 真軌道計算を応用した擬似乱数生成法[4,5]では，初期点 (seed) の集合 I を適切に選ぶことにより，生成される擬似ランダムビット列の下位ビットが一致しないことを保証している．しかし，本研究開始前に行った予備的な計算機実験から，「初期点集合 I に所属する代数的数が全て異なる代数体に所属する」(観測事実 A とする)ことが分かった．このことはビット反転などの様々なビット演算を施してもビット列同士が一致しないことを意味する．観測事実 A を証明することにより，この極めて良い性質を我々の擬似乱数生成法が持つことを示せることが分かっていた．

参考文献

- [1] A. Saito, S. Ito, Physica D 268 (2014), 100-105.
- [2] 齊藤朝輝, 日本応用数学会論文誌 25 (2015), 47-57.
- [3] A. Saito, S. Yasutomi, J. Tamura, S. Ito, Chaos 25 (2015), 063103.
- [4] A. Saito, A. Yamaguchi, Chaos 26 (2016), 063122.
- [5] A. Saito, A. Yamaguchi, Chaos 28 (2018), 103122.

2. 研究の目的

計算機で正確にあつかえる代数的数および代数演算のみを用いることにより，区分的線形写像を含む区分的1次分数写像の誤差のない真軌道を十分長く計算することができる．本研究は，この真軌道計算に関わる以下の3点を目的として研究を行った．1. 真軌道計算法が適用できる力学系のクラスを拡大する．2. 真軌道シミュレーションを用いた非線形現象の解析を行う．3. 真軌道を使った擬似乱数生成法に対して強固な数学的基盤をあたえる．

3. 研究の方法

本研究の方法の最大の特色は，真軌道生成法を用いる点である．この方法を使えば，極めて高い精度が要求されるシミュレーションでも誤差なしで行うことができ，また，Bernoulli 写像やテント写像を使って擬似乱数を生成することが可能になる（これらは，従来のシミュレーション法では不可能だった）．本研究では海外共同研究者とも連携して，真軌道計算に関わる3項目，すなわち(1)真軌道生成法の拡張，(2)真軌道計算の非線形現象への応用，(3)観測事実 A の証明，の研究を行った．

4. 研究成果

- (1) 真軌道生成法の拡張：
真軌道生成法を拡張し，実代数的数を係数にもつ区分的1次分数写像にも適用可能にした．特に，ベータ変換の真軌道生成を行い，その有効性を確認した(図1)．

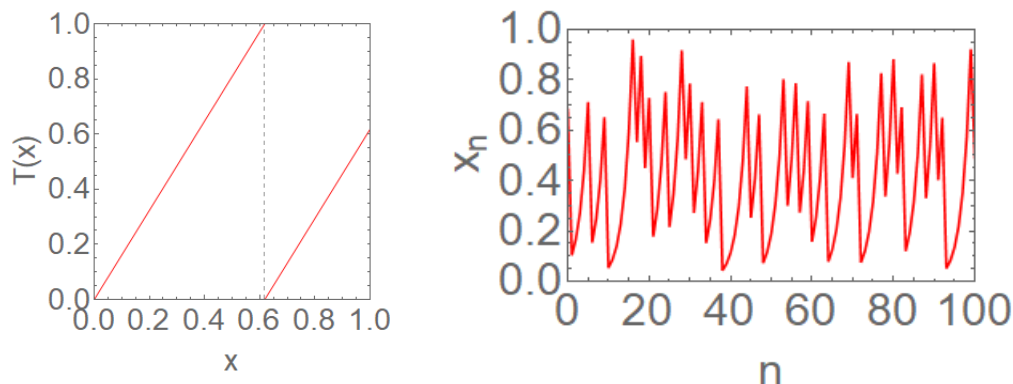


図1 ベータ変換(左)およびベータ変換の真軌道(右)

(2) 真軌道計算の非線形現象への応用:

Lagarias らによって提案された 2 次元区分的線形保測写像を対象に，真軌道シミュレーションを用いた解析を行った．特に，記号力学に基づく曲線群を使って，パラメータ空間に存在する階層的な構造を明らかにした (図 2)．これによって，例えば，任意のパラメータからえられる記号力学を，軌道を生成することなく，いくらでもよい精度で予測することが可能となる．この成果については，海外研究者との共著論文にまとめ，現在出版準備中である．

さらに，既存のユークリッドアルゴリズムと比べて，性能はほぼ劣らないが理論的に性質を解析しやすいことが期待できる新しいユークリッドアルゴリズムを構成した．現在，対応する力学系の真軌道シミュレーションを活用して，アルゴリズムの統計的性質の解析を行っており，今後も海外研究者と共同して研究を進める予定である．

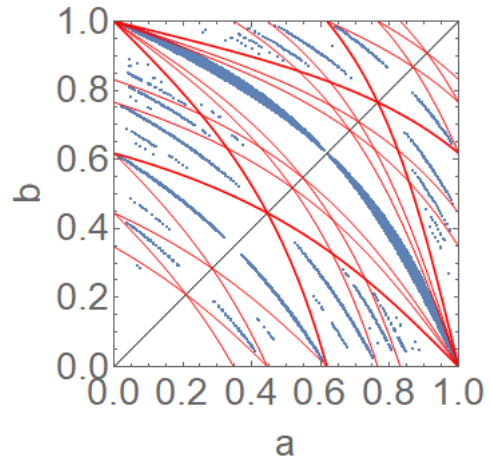


図 2 パラメータ空間の構造

(3) 観測事実 A の証明:

真軌道を使った擬似乱数生成器に対してあたえた，複数の擬似乱数列を生成する際に必要となる初期点 (シード) の集合 I が次の性質をもつことを証明した．「 I の各要素が異なる代数体に所属する」(図 3)．複数の擬似乱数列を生成する際には，生成される擬似乱数列同士ができるだけ異なったものとなることが望ましいが，上記の性質はビット反転などの様々な操作を施してもビット列同士が一致しない (それほど生成される擬似乱数列同士が異なっている) ことを意味する．この極めて良い性質を我々の擬似乱数生成法がもつことを示した．

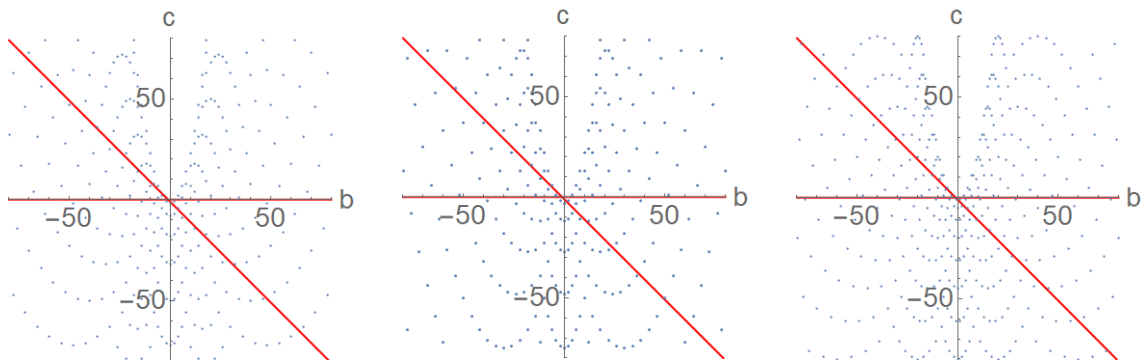


図 3 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ (左), $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ (中央), $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ (右) に所属する初期点

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計3件（うち査読付論文 3件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Asaki Saito, Akihiro Yamaguchi	4. 巻 28
2. 論文標題 Pseudorandom number generator based on the Bernoulli map on cubic algebraic integers	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science	6. 最初と最後の頁 103122
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1063/1.5048115	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Asaki Saito, Jun-ichi Tamura, Shin-ichi Yasutomi	4. 巻 67
2. 論文標題 Continued fraction algorithms and Lagrange's theorem in \mathbb{Q}_p	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Commentarii Mathematici Universitatis Sancti Pauli	6. 最初と最後の頁 27-48
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Asaki Saito, Jun-ichi Tamura, Shin-ichi Yasutomi	4. 巻 89
2. 論文標題 Multidimensional p-adic continued fraction algorithms	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Mathematics of Computation	6. 最初と最後の頁 351-372
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1090/mcom/3458	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計4件（うち招待講演 1件/うち国際学会 2件）

1. 発表者名 Asaki Saito, Akihiro Yamaguchi
2. 発表標題 Generating high-quality pseudorandom sequences using chaotic true orbits on algebraic integers
3. 学会等名 International Conference on Monte Carlo Methods and Applications, MCM 2019（国際学会）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Asaki Saito
2. 発表標題 Algebraic integers and pseudorandom number generation
3. 学会等名 Workshop on Fractal Geometry and Related Topics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 斉藤朝輝, 山口明宏
2. 発表標題 3次元代数的整数上のカオス軌道を利用した疑似乱数生成
3. 学会等名 電子情報通信学会NOLTAソサイエティ大会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 尾ヶ瀬拓哉, 斉藤朝輝
2. 発表標題 C.elegansの歩行の調節と神経系のダイナミクス
3. 学会等名 電子情報通信学会NOLTAソサイエティ大会
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
主たる渡航先の主たる海外共同研究者	ビバルディ フランコ (Vivaldi Franco)	ロンドン大学クイーン・メアリー・数理科学部・教授	

6. 研究組織（つづき）

	氏名 (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
主たる渡航先の主たる海外共同研究者	アルヌー ピエール (Arnoux Pierre)	エクス・マルセイユ大学・マルセイユ数学研究所・教授	