

平成 30 年 12 月 10 日現在

機関番号：14401

研究種目：国際共同研究加速基金（国際共同研究強化）

研究期間：2017～2018

課題番号：16KK0100

研究課題名（和文）ガロワ変形による岩澤理論の一般化と新現象の探求（国際共同研究強化）

研究課題名（英文）Generalization of Iwasawa theory for Galois deformation and related new phenomena (Fostering Joint International Research)

研究代表者

落合理 (Ochiai, Tadashi)

大阪大学・理学研究科・准教授

研究者番号：90372606

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 9,000,000円

渡航期間：12ヶ月

研究成果の概要（和文）：(1) 素数 $p$ が代数群 $\mathrm{GSp}(4)$ のendoscopicなカスピダル保型表現のAdjoint表現のL函数の $s=1$ での特殊値を割り切り、さらに適当な条件をみたすとき、stableなカスピダル保型表現で元のと合同なものが存在することを示した。  
 (2)  $\mathrm{GSp}(4)$ のカスピダル保型表現に対するEuler系の構成を議論した。ノルム両立性などいくつかの性質を確かめて部分結果を得ることができたが、まだ完全なEulerには程遠い。今後引き続き確かめられていない性質などを深く掘り下げて調べていきたい。

研究成果の概要（英文）：(1) We establish the existence of congruences between an endoscopic cuspidal automorphic representation of  $\mathrm{GSp}(4)$  of level 1 and stable cuspidal automorphic representations of the same level and weight modulo certain prime factors of the value at 1 of the adjoint L-function of normalized by a suitable period.  
 (2) We studied the construction of Euler system associated to cuspidal representations of  $\mathrm{GSp}(4)$ . We obtained partial results on norm compatibility of certain motivic elements.

研究分野：岩澤理論

キーワード：岩澤理論 肥田理論 ガロワ変形 Euler系  $p$ 進L函数

## 1. 研究開始当初の背景

$p$  進  $L$  関数や Euler 系は岩澤理論において大事な対象である。イデアル類群や楕円曲線の岩澤理論などの基本的な場合には、これらの存在は既に示されているが一般にはこれらの存在は知られておらず、予想の段階である。岩澤主予想などの大事な問題を正確に定式化したり、解いたりするためには、

(I) 高次の  $L$  関数に対する  $p$  進  $L$  関数を構成する。

(II) 高次元のガロワ表現に対して、Euler 系を構成する。

といったことが大事である。(II)の研究が進展すれば Coleman 写像などを通して(I)の研究が進展することは知られており、両者は密接に関連している。長年の停滞の後、近年は保型  $L$  関数の分野での研究の発展の恩恵により、これらの問題も少し進展の兆しがみられる。ただ、まだ弱い結果や条件付きの結果が多く今後の発展は未知数である。

## 2. 研究の目的

現在採択されている課題名「ガロワ変形による岩澤理論の一般化と新現象の探求」の基盤研究(B)においては、「変形理論の哲学による岩澤理論」という岩澤理論の一般化に取り組んでいる。代数幾何学などでも大事な変形の考え方を岩澤理論にも組織的に導入して、従来の個別のモチーフごとの岩澤理論をモチーフの  $p$  進ガロワ変形に対する統一的な岩澤理論へ拡張したいというのが申請者の長期的な課題である。

まず、申請者の博士論文と申請者自身の博士論文終了後数年の間に出版された研究によって「ガロワ変形の岩澤主予想」の適切な定式化やその証明など一通りの解決を得ている(参考論文[A1],[A2],[A3])。その後、申請者はさらに階数や変数の大きな例での結果を蓄積し、そこでの新現象を探求しながら、何本かの論文を出版した(参考論文[B1],[B2],[B3],[B4])。それぞれの仕事において、高次元の状況からくる新しい問題に遭遇しながら解決してきた経緯があり、着実に知見や新現象の蓄積を重ねてきた。

この基盤(B)の研究課題のもとで、本研究の目的は特に以下の目的に特化して Francesco Lemma 氏との国際共同研究を集中的に進めることである。

(1) 階数の高い  $p$  通常的ガロワ表現やそのガロワ変形に対して、 $p$  進  $L$  関数を沢山構成する。

(2) 階数の高い  $p$  通常的ガロワ表現や多変数の変形空間における Euler 系を構成する。

(3) 変形の高いガロワ表現の岩澤理論を  $p$  通常的でないガロワ変形へも一般化する。

これらは何もととも大きな課題でありす

ぐに達成できるものではないが、これらの目的に近づくための部分課題を適宜見出ししていくを試みた。

## 参考論文

[A1] T. Ochiai, *On the two-variable Iwasawa Main conjecture for Hida deformations*, *Compositio Mathematica*, vol 142, 1157-1200, 2006. [A2] T. Ochiai, *Euler system for Galois deformation*, *Annales de l'Institut Fourier*, vol 55, pp 113-146, 2005. [A3] T. Ochiai, *A generalization of the Coleman map for Hida deformation*, *the American Journal of Mathematics*, vol 125, pp 849-892, 2003. [B1] F. Lemma, T. Ochiai,  *$p$ -adic  $L$ -function and Coleman map for Hida families of  $GSp_4$* , *American Journal of Mathematics*, Volume 136, Number 3, 2014 pp. 729-760 [B2] T. Ochiai, *Several variables  $p$ -adic  $L$ -functions for Hida families of Hilbert modular forms*, *Documenta Mathematica* 17, pp. 807-849, 2012. [B3] O.Fouquet, T. Ochiai, *Control Theorems for Selmer groups of nearly ordinary deformations*, *Crelle Journal* 666, pp. 163-188, 2012. [B4] T.Hara, T. Ochiai, *The cyclotomic Iwasawa Main Conjecture for Hilbert cuspforms with complex multiplication*, *Kyoto Journal of Mathematics*, Volume 58, Number 1, 2018, pp. 1-100.

## 3. 研究の方法

先述の通り、今回の研究は研究代表者と Francesco Lemma 氏(パリ第7大学)との共同研究である。

研究代表者は、Hilbert モジュラーの多変数  $p$  進  $L$  関数の構成、 $GSp(4)$  の 3 変数肥田変形での Euler 系が存在する仮定のもとでの  $p$  進  $L$  関数 Coleman 構成などの研究成果を重ね、岩澤理論的な知見を蓄積してきた。

一方で、共同研究者の Francesco Lemma 氏は  $GSp(4)$  のスピノール  $L$  関数の特殊値の Beilinson 予想に関して博士論文以来いくつかの重要な結果を重ね、保型  $L$  関数の知見を蓄積してきた。

両者の知見で補い合いつつ、 $GSp(4)$  の場合に深く掘り下げて行くことを目指した。 $GL(2)$  の場合の加藤の仕事において最も大事なステップであった explicit reciprocity law の部分は、Loeffler らを始めとする人々による関連研究でも避けられていた。そうするとどうしても得られる結果が弱くなるので explicit reciprocity law を避けず正面から研究する方法をとった。また、先に述べた背景において、(II)の研究から(I)の研究へと進む方向に触れたが、今回の研究

方法では、(I)の研究を深めることで(II)の研究を深めていく逆のアプローチを取った。

#### 4. 研究成果

素数  $p$  が代数群  $\mathrm{GSp}(4)$  の endoscopic なカスピダル保型表現 の Adjoint 表現の  $L$  関数の  $s=1$  での特殊値を割り切り、さらに適当な条件をみたすとき、stable なカスピダル保型表現で元の と合同なものが存在することを示した。この結果とその詳細な証明を論文として完成させ、archive に上げるとともに ([arXiv:1806.02135](https://arxiv.org/abs/1806.02135) [math.NT]), 専門誌に投稿した。

また、 $\mathrm{GSp}(4)$  のカスピダル保型表現 に対する Euler 系の構成を Piatetski-Shapiro の積分表示や Beilinson-Kato element を用いて議論した。モチヴィックに作られた元たちのノルム両立性など、いくつかの性質を確かめて部分結果を得ることができたが、まだ完全な Euler には程遠い。今後引き続き確かめられていない性質などを深く掘り下げて調べていきたい。

#### 5. 主な発表論文等 (研究代表者は下線)

[雑誌論文](計 1 件)

(1) Tadashi Ochiai and Kazuma Shimomoto, Specialization Method in Krull Dimension Two and Euler System Theory over Normal Deformation Rings, Annales mathématiques du Québec に掲載確定 (査読あり)

[学会発表](計 8 件)

(1) Tadashi Ochiai, Overview of  $p$ -adic  $L$ -function, 合宿型ワークショップ "Special Values of Automorphic  $L$ -functions and Associated  $p$ -adic  $L$ -Functions" (9/30--10/5) (於 Casa Mathematica Oaxaca/Oaxaca/メキシコ) 2018年10月1日

(2) Tadashi Ochiai, Endoscopic congruences modulo adjoint  $L$ -values for  $\mathrm{GSp}(4)$ , 研究集会 "Workshop on  $L$ -functions, Langlands functoriality and Trace formula, including relative aspects" (9/3-9/7) (Porquerolles/France) 2018年9月6日

(3) Tadashi Ochiai, La conjecture principale d'Iwasawa pour les familles  $p$ -adiques de formes modulaires, セミナー "Seminaire de la théorie des nombres" (Université de Caen/France) 2018年5月25日

(4) Tadashi Ochiai, La conjecture principale d'Iwasawa pour les familles de formes modulaires  $p$ -adiques, セミナー "Seminaire de la théorie des nombres" (Université de Bordeaux/France) 2018年5月4日

(5) Tadashi Ochiai, La conjecture principale d'Iwasawa pour les déformations galoisiennes  $p$ -adiques de rang general, セミナー "Seminaire de la théorie des nombres" (Université Paris 13/France) 2018年3月23日

(6) Tadashi Ochiai, La conjecture principale d'Iwasawa pour les familles  $p$ -adiques des formes paraboliques, セミナー "Seminaire de la théorie des nombres" (Université de Grenoble/France) 2018年2月15日

(7) Tadashi Ochiai, Iwasawa theory for Coleman families, セミナー "Number theory seminar" (Heidelberg University/Germany) 2018年2月9日

(8) Tadashi Ochiai, La conjecture principale d'Iwasawa pour les déformations galoisiennes  $p$ -adiques et le système d'Euler, セミナー "Seminaire: Groupes Reductifs et Formes Automorphes" (Université Paris 7/France) 2017年10月16日

[図書](計 0 件)

[産業財産権]

出願状況(計 0 件)

名称:  
発明者:  
権利者:  
種類:  
番号:  
出願年:  
国内外の別:

取得状況(計 0 件)

名称:  
発明者:

権利者：  
種類：  
番号：  
取得年：  
国内外の別：

〔その他〕  
ホームページ等

本人の研究ページ  
<http://www.math.sci.osaka-u.ac.jp/~ochiai/work.html>

大阪大学研究者総覧  
<http://www.dma.jim.osaka-u.ac.jp/view?l=ja&u=7912&k=落合理&kc=1&o=name-a&pp=50&sm=keyword&sl=ja&sp=1>

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

落合理 (OCHIAI, Tadashi)  
大阪大学・大学院理学研究科・准教授  
研究者番号： 90372606

### (2) 研究協力者

〔主たる渡航先の主たる海外共同研究者〕

Francesco Lemma  
パリ第7大学・IMJ-PRG・講師