

平成 21 年 5 月 19 日現在

研究種目：基盤研究(B)

研究期間：2005～2008

課題番号：17340016

研究課題名（和文） 双曲 3 次元多様体の分類と双曲構造の変形空間

研究課題名（英文） A classification of hyperbolic 3-manifolds and deformation spaces of hyperbolic structures

研究代表者

大鹿 健一 (OHSHIKA KEN' ICHI)

大阪大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：70183225

研究成果の概要：

幾何化予想の解決に伴って、重要性がますます高まっている、3次元の双曲多様体の研究を、有限体積の場合と無限体積の場合を相互に関連づけながら遂行した。この研究で扱われる対象は Klein 群、Teichmüller 空間、3次元多様体、写像類群等多岐にわたり、それぞれの結果を有機的に結合することにより進められた。特に Klein 群と有限体積の3次元双曲多様体でのそれぞれの研究成果を、互いに応用することにより、Klein 群では変形空間の大域的な性質を解明する手がかりが得られ、有限体積双曲多様体では、体積の分布の漸近的な様子を調べる手法が開発された。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2005年度	3,300,000	0	3,300,000
2006年度	3,400,000	0	3,400,000
2007年度	3,500,000	1,050,000	4,550,000
2008年度	3,500,000	1,050,000	4,550,000
年度			
総計	13,700,000	2,100,000	15,800,000

研究分野：位相幾何学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：双曲多様体、Klein 群、Teichmüller 空間、3次元多様体、Riemann 面、写像類群

1. 研究開始当初の背景

Perelman による 3次元多様体の幾何化予想の解決に伴って、3次元多様体の全体像を理解するためには、3次元双曲多様体の研究を推進すべきことが明らかになった。3次元双曲多様体の研究では有限体積のものとは無限体積のもの（Klein 群）を並行し、関連させて研究する方が多い

ことが、Thurston による研究以来常識となっており、また Klein 群の研究自体は関数論、複素力学型の研究にも大きなインパクトを与えてきた。本研究はこの大きな流れに沿ったものであり、それぞれの対象の専門的研究者を結集して双曲多様体の研究を推進することが、大きな成果をもたらすと期待した。

2. 研究の目的

有限体積双曲多様体については、分類問題に焦点を当てて研究をする。特に体積の分布状況を調べるのが一番の目標である。そのために、無限体積での研究成果を応用できるのではないかと目論んだ。

無限体積双曲多様体、Klein 群の研究においては、変形空間の位相的性質を調べることに焦点を当てる。変形空間の研究は Teichmüller 空間の研究との関連を軸として進める。Teichmüller 空間には Weil-Peterson 距離のような有力な道具があるので、これを利用して、変形空間の境界の様子を解明することを目指した。さらに Teichmüller 空間のデリケートな構造の解明に不可欠な、写像類群の大域幾何的研究も同時に進めることを考えた。

3. 研究の方法

研究は以下のような分担体制を組み、全体の研究総括を大鹿が行った。定期的にセミナー、研究集会を開いた。特に大阪大学において本補助金を中心的に用い、低次元トポロジーセミナーをほぼ毎週開催し、本研究の推進に役立てた。

(1) Klein 群論を用いた研究。

大鹿, 相馬, 宮地。

(2) 3次元多様体を軸とした研究。

小島, 作間, 相馬。

(3) Riemann 面, Teichmüller 空間からのアプローチ。

遠藤, 宮地, 河澄。

4. 研究成果

(1) Klein 群論を用いた研究

大鹿と宮地は Minsky 等によって開発された、モデル多様体を用いた ending lamination conjecture の解決の研究を進展させ、compact core が boundary-reducible であるような場合のモデル多様体の構成を明確化させた。この結果を応用して、自由群の bounded cohomology の無限個の生成元を構成することに成功した。

さらにモデル多様体の理論を特に Riley slice の閉包に含まれる Klein 群について精密化し、一様なモデル多様体を構成することに成功した。これは boundary-reducible な core を持つ Klein 群の変形空間では初めての試みである。

相馬は Calegari-Gabai による tameness 予想の解決や Minsky による

ending lamination 予想の議論を極小曲面を用いたより幾何学的方法に置き換える試みを続けた。この手法を進展させ、大鹿と相馬は surface Klein 群の幾何的極限を up to isometries で完全に分類することに成功した。この結果をより一般の Klein 群に拡張する研究も進行中である。

大鹿はこの結果の一部を変形空間の位相構造の研究に応用し、surface Klein 群の列の発散条件をもっとも一般的な形で与え、bumping が起きる場所についての必要条件を与えた。

作間は秋吉, 山下, 和田と協力し、長年内容が不明解な部分が残っていた、Jørgensen による complex probability と初等的な行列の議論を用いた once-punctured torus quasi-Fuchsian space の研究を解明し、書籍として出版した。

さらに秋吉, 宮地と共同で、McShane の等式を once-punctured torus 群全体に拡張することに成功した。

(2) 3次元多様体を軸とした研究

小島は、3次元多様体の様々な不変量の漸近的な関係を調べることによる、体積の分布の研究を金, 高沢と共同で始めた。特に双曲的な円周上の曲面バンドルについて、モノドロミーのエントロピーとバンドルの体積には、漸近的に1次不等式の関係があり、不等式の係数をもっとも効率よくとると、それは曲面の種数による定数になることを示した。実はこの現象は、(1)で述べた幾何的極限の分類の研究と密接な関係があることが、その後の大鹿, 金, 高沢の研究で解明されつつある。

相馬は Seifert 多様体についてホモトピー同値が同相を導くという P. Scott の定理について極小曲面論を用いた簡明な証明を与えた。

(3) Riemann 面, Teichmüller 空間からのアプローチ。

写像類群を大域幾何的に調べることは双曲多様体の研究と関連が深い。遠藤は Kotschik と共同で、写像類群からの擬準同型写像の研究を行った。その結果、写像類群の元は擬準同型では分離できないことがあることが示された。

Teichmüller 空間の研究は Klein 群の研究と切っても切り離せない関係にある。宮地は Teichmüller 空間の極値的長さを用いたコンパクト化を考え、それを通常の Thurston コンパクト化、すなわち双曲的長さを用いたコンパクト化とどのように違うかを調べた。

無限型の Riemann 面においては、有

限型の場合の Teichmüller 空間の適切な一般化はむしろ漸近的 Teichmüller 空間では無いかと思われている。宮地は漸近的 Teichmüller 空間について、Bers 埋め込みを考え、いわゆる Bers の density がこの場合には成立しないことを示した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 12 件, 全て査読有り)

- ①. Liuan Li, Ken' ich Ohshika and Xiantao Wang, On Klein-Maskit Combination Theorem in space I, to appear in Osaka J. Math
- ②. Hideki Miyachi, Teichmüller rays and the Gardiner-Masur boundary of Teichmüller space, *Geom. Dedicata* 137 (2008), 113--141
- ③. Hideki Miyachi, Image of asymptotic Bers Map, *Journal of Mathematical Society of Japan* 60, no.4 (2008), 1255--1276.
- ④. H. Endo and D. Kotschick, Failure of separation by quasi-homomorphisms in mapping class groups, *Proc. Amer. Math. Soc.* 135 (2007), 2747-2750
- ⑤. Ken' ichi Ohshika and Hideki Miyachi, On topologically tame Kleinian groups with bounded geometry. *Spaces of Kleinian groups*, 29--48, *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, 329, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2006
- ⑥. Sadavoshi Kojima, Shigeru Mizushima, Ser Peow Tan, Circle packings on surfaces with projective structures and uniformization. *Pacific J. Math.* 225 (2006), 287--300.
- ⑦. Teruhiko Soma, Existence of ruled wrappings in hyperbolic 3-manifolds. *Geom. Topol.* 10 (2006), 1173-1184
- ⑧. Teruhiko Soma, Scott's rigidity theorem for Seifert fibered spaces; revisited. *Trans. Amer. Math. Soc.* 358 (2006), 4057-4070
- ⑨. Hiroataka Akiyoshi, Hideki Miyachi, Makoto Sakuma, Variations of McShane's identity for punctured surface groups. *Spaces of Kleinian groups*, 151--185, *London Math. Soc.*

Lecture Note Ser., 329, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2006.

- ⑩. Ken' ichi Ohshika, The continuity of convex cores with respect to the geometric topology. *Comm. Anal. Geom.* 13 (2005), 479--510.
- ⑪. Ken' ichi Ohshika, Kleinian groups which are limits of geometrically finite groups. *Mem. Amer. Math. Soc.* 177 (2005), no. 834, xii+116 pp.
- ⑫. Teruhiko Soma, Least area planes in Gromov hyperbolic 3-spaces with co-compact metric. *Geom. Dedicata* 112 (2005), 123-128

[学会発表] (計 11 件)

- ①. 大鹿健一, Geometric limits of freely indecomposable Kleinian groups, リーマン面不連続群研究集会, 大阪大学, 2009/01
- ②. Ken' ichi Ohshika, Classification of geometric limits, Hyperbolic geometry and related topics, KIAS Seoul Korea, 2008/12
- ③. Ken' ichi Ohshika Deformation spaces of Kleinian groups, Algebraic Topology, Braids and Mapping Class Groups, National University of Singapore, 2008/12
- ④. 大鹿健一, Geometry and topology of geometric limits, リーマン面・不連続群研究集会, 岡山大学, 2008/01
- ⑤. 大鹿健一, Geometric limits viewed through model manifolds, 離散群と双曲空間の解析学とトポロジー, 京都大学数理科学研究所, 2007/12
- ⑥. Teruhiko Soma, Geometry and topology of geometric limits, Topics in Teichmüller Theory and Kleinian Groups MSRI, Berkely, USA, 2007/11
- ⑦. Ken' ichi Ohshika Divergence, exotic convergence and self-bumping in quasi-Fuchsian spaces, Workshop on Hyperbolic structures on 3-manifolds and large scale geometry of Teichmüller space, University of Warwick, 2007/07
- ⑧. 大鹿健一, Small actions of 3-manifold groups on R-trees and degeneration of hyperbolic structures, 多様体上の双曲群の作用とその周辺, 首都大学東京, 2006/6
- ⑨. 大鹿健一, 3次元多様体群の小さい R-樹作用と双曲構造の退化 2006/03 トポロジーの展望 九州大学
- ⑩. 大鹿健一, Riley slice の境界について

て リーマン面、不連続群研究集会、
奈良女子大学, 2006/01

- ⑩. 大鹿健一, The boundary of the Riley slice, 双曲空間の複素解析と幾何学的研究, 京都大学数理解析研究所, 2005/12,

[図書] (計 1 件)

- ①. Hiroataka Akiyoshi, Makoto Sakuma, Masaaki Wada, Yasushi Yamashita, Punctured torus groups and 2-bridge knot groups. I. Lecture Notes in Mathematics, 1909. Springer, Berlin, 2007. xliv+252 pp.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

大鹿 健一

大阪大学・大学院理学研究科・教授

70183225

(2) 研究分担者

- ①. 小島 定吉

東京工業大学・大学院情報理工学研究科・教授

90117705

- ②. 相馬 輝彦

首都大学東京・大学院理工学研究科・教授

50154688

- ③. 作間 誠

広島大学・大学院理学研究科・教授

30178602

- ④. 河澄 響矢

東京大学・大学院数理科学研究科・准教授

30214646

- ⑤. 遠藤 久顕

大阪大学・大学院理学研究科・准教授

20323777

- ⑥. 宮地 秀樹

大阪大学・大学院理学研究科・准教授

40385480

(3) 連携研究者

研究分担者のうち、相馬、作間、河澄、遠藤は最終年度は連携研究者になった。