

研究種目：基盤研究 (B)  
 研究期間：2005～2008  
 課題番号：17340020  
 研究課題名 (和文) 代数的方法による符号理論の組合せデザインと離散幾何への応用  
 研究課題名 (英文) Applications of algebraic methods in coding theory to combinatorial designs and discrete geometry  
 研究代表者  
 宗政 昭弘 (MUNEMASA AKIHIRO)  
 東北大学・大学院情報科学研究科・教授  
 研究者番号：50219862

研究成果の概要：自己双対符号の性質を考察したこと、およびその中で特異なものを分類したことが主な成果である。特に、整数格子の分類結果を応用することにより、これまで分類することができなかった3元や5元自己双対符号についても分類方法を確立した。また、関連した組合せ論の研究として、有限体からできる強正則グラフとアソシエーションスキームの構成、組合せデザインの構成にも取り組んだ。

## 交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2005年度	1,400,000	0	1,400,000
2006年度	1,800,000	0	1,800,000
2007年度	1,600,000	480,000	2,080,000
2008年度	1,300,000	390,000	1,690,000
年度			
総計	6,100,000	870,000	6,970,000

研究分野：数学

科研費の分科・細目：数学・数学一般 (含確率論・統計数学)

キーワード：応用数学、代数的組合せ論、符号理論、離散幾何、組合せデザイン理論、置換群論、グラフ理論

## 1. 研究開始当初の背景

符号理論に代数的方法を適用することは、Delsarte によって 1970 年代にアソシエーションスキームという枠組みの中で定式化され、それまで知られていた多くの結果、特に符号の限界式が統一的な方法で導かれることが示された。さらに Hamming アソシエーションスキーム以外の P- and Q-polynomial アソシエーションスキーム、例えば Johnson アソシエーションスキーム

についても同様の理論を構成することで、デザイン理論にも応用できることが示された。一方、Delsarte 理論からは何も結論が得られない代数的符号理論の難問、例えば self-dual binary [72, 36, 16] code の存在問題等の解決に向けて、最近新しいアイデアが少しずつ出てきている。本研究の目的は、これらの萌芽的な新しいアイデアを強く押し進めることによって、難問解決への道筋を見つけることであった。

## 2. 研究の目的

符号理論、組合せデザイン理論、格子の理論における具体的な問題の解決が目的であった。Self-dual binary [72, 36, 16] code や、extremal even unimodular な 72 次元格子の存在という難問解決の前に、まだわかっていないことも多い低い次元の状況を明らかにしていく過程において、様々な道具を開発し、より精密な成果を得られるようにして行く。ユークリッド空間における格子の理論や、球面上のデザインの理論を利用することにより、これまで未解決であった符号やデザインの存在問題を解決していくことである。

## 3. 研究の方法

あらかじめ共同研究のために費やす時間を長期に渡って確保するのは難しいため、研究集会で研究組織のメンバーが本研究課題に関連したことを発表することによって問題提起をする一方、研究集会以外の機会に実際に長時間に渡って研究協力者に直接会って議論することによって研究を進める。

平成 18 年度は、仙台市において第 23 回代数的組合せ論シンポジウムを大規模な国際会議として開催するため、海外から研究協力者として M. Deza 氏を招へいし、離散幾何についての研究発表を依頼するとともに、滞在中には同氏の研究内容のグラフ理論への応用について検討する。

研究分担者の原田昌晃氏と緊密に連絡をとりながら、自己双対符号の分類に関する研究を進める。国内における研究集会には同時に参加して効率良い情報交換に務め、研究成果のとりまとめのためには、互いの研究室を訪問して論文作成の作業を共同で行う。

また、群論、整数論、組合せ論等の研究集会に参加して情報収集を行う。特に、組合せデザインに関連している有限幾何、離散幾何を代数的に研究している研究者は日本には少数しかおらず、ドイツ、オランダ、ベルギーが突出して研究が進んでいる。そのためにヨーロッパにおける有限幾何と組合せデザイン関係の会議に参加して成果発表、情報交換を行う。

## 4. 研究成果

(1) 2 元自己双対符号の性質について、代数的な方法と計算機による数え上げの両方の技術を用いて、エクストリーマルな 2 元自己双対符号の weight enumerator では未決定であった最小の長さである、長さ 42 の場合にこれを決定することができた。そこで用い

られている方法の一つに、shadow を分割するという考え方があった。その方法によって得られる一般的な制限や、被覆半径についての成果は、別の論文として発表した。

(2) 有限射影幾何を応用した difference system of sets の構成について研究した。この概念は情報理論への応用が期待される組合せ論的対象であり、有限射影幾何を用いて、実例の構成を行った。

(3) 有限アーベル群を用いた組合せデザインの構成を研究した。これまで巡回群の場合ばかり研究されてきたが、会合数 3 のデザインの構成を有限アーベル群に拡張することができることを示した。より複雑な、会合数 1 のデザインの構成を目指して、今後さらなる展開を図る。

(4) 有限環上の自己直交符号のマスフォーミュラを証明した。この成果はさらに一般化が進行中であり、E8 格子におけるフレームの総数を数える簡便な公式を与えることができた。

(5) 整数格子の理論を自己双対符号の分類に役立てる方法を確立した。2 元でない符号について特に有効なこの方法を用いて、3 元では長さ 24 と長さ 28 の場合に分類を完成させた。この研究成果は首都大学東京における研究集会において発表した。4 元の場合は、リーチ格子があらゆる意味で最も重要であり、そのフレームの数え上げをするために、プログラムの改良を行っている。この計算結果からは VOA に関して新たな知見が得られることになる。

(6) 有限体からできる強正則グラフとアソシエーションスキームの構成を行った。計算機を用いて特異な現象を発見し、それが新しい強正則グラフを生むことを明らかにした。この研究成果はオランダにおける国際会議で成果の発表を行った。

(7) 研究協力者の谷口氏と、グラフの最小固有値と構造との関係について研究を行い、スロベニア及びオランダにおける国際会議で成果の発表を行った。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 10 件)

① R. A. L. Betty, A. Munemasa, Mass formula for self-orthogonal codes

- over  $\mathbb{Z}_p^2$ , Journal of Combinatorics, Information & System Sciences, 掲載受理, 査読有
- ② M. Harada, A. Munemasa, B. Venkov, Classification of ternary extremal self-dual codes of length 28, Math. Comp. 78 (2009), 1787-1796, 査読有
  - ③ M. Harada, A. Munemasa, There exists no self-dual [24, 12, 10] code over  $F_5$ , Designs, Codes and Cryptography 12 (2009), 125-127, 査読有
  - ④ T. Taniguchi, On graphs with the smallest eigenvalue at least  $-1$ -square root 2, Ars Math. Contemp. 1 (2008) 81-98, 査読有
  - ⑤ S. Bouyuklieva, M. Harada, A. Munemasa, Determination of weight enumerators of binary extremal self-dual [42, 21, 8] codes, Finite Fields and Their Applications, 14 (2008), 177-187, 査読有
  - ⑥ T. Ikuta, A. Munemasa, A new example of non-amorphous association schemes, Contributions to Discrete Mathematics 3 (2008), 31-36, 査読有
  - ⑦ M. Harada, A. Munemasa, On the covering radii of extremal doubly even self-dual codes, Adv. Math. Commun. 1 (2007), 251-256, 査読有
  - ⑧ A. Muneamsa and M. Sawa, Simple abelian quadruple systems, J. Combin. Theory, Ser. A 114 (2007), 1160-1164, 査読有
  - ⑨ M. Harada, A. Munemasa, Some restrictions on weight enumerators of singly even self-dual codes, IEEE Trans. Inform. Theory, 52 (2006), 1266-1269, 査読有
  - ⑩ R. Fuji-Hara, A. Munemasa, V. D. Tonchev, Hyperplane partitions and difference systems of sets, J. Combin. Theory, Ser. A, 113 (2006), 1689-1698, 査読有

[学会発表] (計 9 件)

- ① 谷口哲至 "On graphs whose smallest eigenvalue is at least  $-3$ " Geometric and Algebraic Combinatorics 4, 2008 年 8 月 21 日 Oisterwijk, オランダ王国
- ② 宗政昭弘 "On some cyclotomic association schemes and strongly regular graphs" Geometric and Algebraic Combinatorics 4, 2008 年 8 月 18 日 Oisterwijk, オランダ王国
- ③ 宗政昭弘 「長さ 28 のエクストリーマル 3 元自己双対符号の分類」, 代数学と

- ④ 谷口哲至 "On graphs with the smallest eigenvalue at least  $-1$ -square root 2" Sixth Slovenian International Conference on Graph Theory, 2007 年 6 月 26 日 Bled, スロベニア
- ⑤ 宗政昭弘 "On Graphs with Complete Multipartite  $\mu$ -Graphs" Sixth Slovenian International Conference on Graph Theory, 2007 年 6 月 25 日 Bled, スロベニア
- ⑥ 宗政昭弘 "On Graphs with Complete Multipartite  $\mu$ -Graphs" Korea-Japan Workshop on Algebra and Combinatorics 2007 年 2 月 10 日 釜山国立大学, 韓国
- ⑦ 宗政昭弘 "Combinatorial structures derived from extremal even unimodular lattices," Algebra and Combinatorics, 2006 年 4 月 1 日 Ateneo de Manila University, フィリピン共和国
- ⑧ 宗政昭弘 Covering radii of extremal binary doubly even self-dual codes The Asian Symposium on Computer Mathematics 2005, 2005 年 12 月 10 日. Korean Institute of Advanced Study, 韓国
- ⑨ 宗政昭弘 An extremal problem related to binary singly even self-dual codes 「組合せデザインとその周辺における数理的基礎およびそれらの応用」 2005 年 8 月 4 日 京都大学数理解析研究所

[その他]

ホームページ

<http://www.math.is.tohoku.ac.jp/~munemasa/selfdualcodes.htm>

## 6. 研究組織

(1) 研究代表者

宗政 昭弘 (MUNEMASA AKIHIRO)  
東北大学・大学院情報科学研究科・教授  
研究者番号 : 50219862

## (2) 研究分担者

原田 昌晃 (HARADA MASA AKI)  
山形大学・理学部・准教授  
研究者番号 : 90292408

## (3) 連携研究者

谷口 哲至 (TANIGUCHI TETSUJI)

松江工業高等専門学校・数理科学科・助教  
研究者番号：90543728

今井 秀雄 (IMAI HIDEO)  
東北大学・大学院情報科学研究科・准教授  
研究者番号：10093668

浦川 肇 (URAKAWA HAJIME)  
東北大学・大学院情報科学研究科・教授  
研究者番号：50022679

麻生 透 (ASOH TORU)  
東北大学・大学院情報科学研究科・准教授  
研究者番号：00111352

田谷 久雄 (TAYA HISAO)  
宮城教育大学・教育学部・准教授  
研究者番号：40257241

別宮 耕一 (BETSUMIYA KOICHI)  
弘前大学・理工学部・准教授  
研究者番号：60364684