

平成21年 5月22日現在

研究種目：基盤研究（B）

研究期間：2005～2008

課題番号：17340025

研究課題名（和文） 平面被覆予想の最終解決に向けた組織的研究

研究課題名（英文） Organizational study toward the final solution  
to Planar Cover Conjecture

研究代表者

根上 生也 (NEGAMI SEIYA)

国立大学法人横浜国立大学・教育人間科学部・教授

研究者番号：40164652

研究成果の概要：位相幾何学的グラフ理論における未解決問題の1つである「平面被覆予想」の最終的な解決を目指して組織的に研究を行った。予想の解決には至らなかったが、平面上の六角形分割に対する放電法を利用するという証明手法が提案された。また、予想の解決と関連して、閉曲面上の三角形分割の弛緩度や識別数と再埋蔵理論、グラフの被覆の代数的な数え上げ理論など、位相幾何学的グラフ理論における様々なテーマについて多くの定理を得た。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2005年度	3,400,000	0	3,400,000
2006年度	2,600,000	0	2,600,000
2007年度	2,600,000	780,000	3,380,000
2008年度	4,100,000	1,230,000	5,330,000
年度			
総計	12,700,000	2,010,000	14,710,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・数学一般（含確率論・統計数学）

キーワード：離散数学，トポロジー，位相幾何学的グラフ理論，平面被覆予想，グラフの被覆，グラフの平面性，射影平面的グラフ

## 1. 研究開始当初の背景

1986年に研究代表者の根上は「連結グラフが射影平面に埋め込み可能となるための必要十分条件はそれが有限平面的被覆を持つことであろう」という予想を提唱した。その必要性は明らかであり、根上は被覆を群作用のあるものに限定すると予想は成立することを証明している。予想が提唱された当初は、「1-2-無限大予想」と呼ばれていたが、その後、国内外の位相幾何学的グラフ理論の研究者の関心を集め「平面被覆予想」と呼ばれるようになった。

これまでの研究成果により、 $K_{1,2,2,2}$  というグラフが有限平面的グラフを持たなければ平面被覆予想は成立し、仮に成立しなくても、その反例は高々16種類の具体的な構造に限られることがわかっている。したがって、平面予想を肯定的に支持する状況証拠は十分にあり、予想の完全解決を願う声が高まっていた。

## 2. 研究の目的

平面被覆予想の最終的な解決を目指して組織的な研究を行うとともに、それと関連し

て位相幾何学的グラフ理論における様々なテーマについて総合的に研究し、新たな研究テーマを創出する。

### 3. 研究の方法

以下のメンバーを中核として、国内外の研究者と交流を持ちながら、平面被覆予想とそれを関連するテーマについて探究していく。その際、各メンバーは概ね次のような役割を担当する。

根上生也	研究全体の統括
中本敦浩	位相幾何学的手法による探究
山本 光	情報科学的手法による探究
太田克弘	グラフ理論的手法による探究
佐藤 巖	代数的手法による探究

研究者間の交流と研究成果の発表の場として、毎年、横浜国立大学で「位相幾何学的グラフ理論研究集会」を開催する。特に、最終年度にはそれを「The 20<sup>th</sup> Workshop on Topological Graph Theory in Yokohama — TGT20」と題する国際会議として開催し、それまでの研究成果を総括する。

### 4. 研究成果

平面被覆予想の完全解決に至らなかったが、 $K_{1,2,2,2}$  の仮想的な有限平面的被覆を平面上の六角形分割に置き換えて、いわゆる放電法を適用し、その非存在を証明するという手法が提案された。また、閉曲面の三角形分の再埋蔵構造と関連させて、その弛緩度や識別数の上界を与える理論を構築し、射影平面やトーラスに対してその具体的な値を示した。グラフの被覆の数え上げに関する代数的な手法も多数開発した。

最終年度に開催した国際会議には、国内外から約 100 名の参加者があり、そのうち海外からの参加者は 16 名だった。9 名の招待講演者には、海外における位相幾何学的グラフ理論の研究動向について講演をしてもらい、有益な情報を得られ、いくつかの共同研究が生まれている。たとえば、物理学と関連した Zhicheng の講演に触発されて、中本と Mohar は閉曲面上の四角形分割の染色数に関する確率論的な議論を展開している。また、ある制限のもとで辺どうしの交差を許したグラフの閉曲面への埋め込み（厳密には埋め込みではない）の議論も展開された。

国際会議を運営する過程で、平面被覆予想において「被覆」を「分岐被覆」に置き換えて得られる予想に対しては反例があるという情報が得られた。平面被覆予想と同様に、正則な分岐被覆に限定すればその予想が正しいこと証明されていただけに、その情報は衝撃的である。それと同時に、グラフの分岐被覆に関する研究の新たな扉が開かれた。

### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 40 件)

1. Ken-ichi Kawarabayashi, Raiji Mukae and Atsuhiko Nakamoto,  $K_6$ -Minors in triangulations on the Klein bottle. SIAM J. Discrete Math. 23 (2008/09), no. 1, 96–108. 査読有
2. Tomotaka Fukuda, Seiya Negami and Thomas W. Tucker, 3-Connected planar graphs are 2-distinguishable with few exceptions. Yokohama Math. J. 54 (2008), no. 2, 143–153. 査読有
3. Atsuhiko Nakamoto and Yusuke Suzuki,  $N$ -Flips in even triangulations on the projective plane. Discrete Math. 308 (2008), no. 23, 5454–5462. 査読有
4. C. Paul Bonnington and Atsuhiko Nakamoto, Geometric realization of a triangulation on the projective plane with one face removed. Discrete Comput. Geom. 40 (2008), no. 1, 141–157. 査読有
5. Atsuhiko Nakamoto, 5-Chromatic even triangulations on surfaces. Discrete Math. 308 (2008), no. 12, 2571–2580. 査読有
6. Iwao Sato, Bartholdi zeta functions of periodic simple graphs. Far East J. Math. Sci. (FJMS) 30 (2008), no. 2, 233–251. 査読有
7. Iwao Sato, Spectra of Laplacian matrices of semiregular bipartite graphs. Far East J. Math. Sci. (FJMS) 30 (2008), no. 3, 557–566. 査読有
8. Iwao Sato, The stochastic weighted complexity of a group covering of a digraph. Linear Algebra Appl. 429 (2008), no. 8–9, 1905–1914. 査読有
9. Iwao Sato, Weighted Bartholdi zeta functions of graph coverings. Discrete Math. 308 (2008), no. 12, 2600–2606. 査読有
10. Seiya Negami, The distinguishing numbers of triangulations on the projective plane. Proceedings of the 38th Southeastern International Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing. Congr. Numer. 186 (2007), 135–144. 査読有
11. Atsuhiko Nakamoto, Yoshiaki Oda and Katsuhiro Ota,  $K_6$ -Minors in triangulations on the double torus. Proceedings of the 38th Southeastern International Conference on

- Combinatorics, Graph Theory and Computing. Congr. Numer. 188 (2007), 150–160. 査読有
12. Atsuhiro Nakamoto and Norihito Sasanuma, 3-Colorable even embeddings on closed surfaces. *Graphs Combin.* 23 (2007), no. 1, 87–95. 査読有
  13. Ken-ichi Kawarabayashi and Atsuhiro Nakamoto, The Erdős–Pósa property for vertex- and edge-disjoint odd cycles in graphs on orientable surfaces. *Discrete Math.* 307 (2007), no. 6, 764–768. 査読有
  14. Iwao Sato, A new Bartholdi zeta function of a graph. *Int. J. Algebra* 1 (2007), no. 5–8, 269–281. 査読有
  15. Young-Bin Choe, Jin Ho Kwak, Yong Sung Park and Iwao Sato, Bartholdi zeta and  $L$ -functions of weighted digraphs, their coverings and products. *Adv. Math.* 213 (2007), no. 2, 865–886. 査読有
  16. Aiping Deng, Iwao Sato and Yaokun Wu, Homomorphisms, representations and characteristic polynomials of digraphs. *Linear Algebra Appl.* 423 (2007), no. 2–3, 386–407. 査読有
  17. Aiping Deng, Iwao Sato and Yaokun Wu, Characteristic polynomials of ramified uniform covering digraphs. *European J. Combin.* 28 (2007), no. 4, 1099–1114. 査読有
  18. Iwao Sato, Bartholdi zeta functions for hypergraphs. *Electron. J. Combin.* 14 (2007), no. 1, Note 2, 9 pp. (electronic). 査読有
  19. Iwao Sato, Zeta functions and complexities of a semiregular bipartite graph and its line graph. *Discrete Math.* 307 (2007), no. 2, 237–245. 査読有
  20. Jin Ho Kwak, Yong Sung Park and Iwao Sato, Weighted complexities of graph products and bundles. *European J. Combin.* 28 (2007), no. 1, 228–245. 査読有
  21. Hideo Komuro, Kiyoshi Ando and Atsuhiro Nakamoto, Tight quadrangulations on the sphere. *Discrete Math.* 306 (2006), no. 2, 278–283. 査読有
  22. Atsuhiro Nakamoto, Tadashi Sakuma and Yusuke Suzuki,  $N$ -Flips in even triangulations on the sphere. *J. Graph Theory* 51 (2006), no. 3, 260–268. 査読有
  23. Jun Fujisawa and Katsuhiro Ota, Weighted Ramsey problem. *Australas. J. Combin.* 34 (2006), 331–342. 査読有
  24. Iwao Sato, Weighted zeta functions of graph coverings. *Electron. J. Combin.* 13 (2006), no. 1, Research Paper 91, 12 pp. (electronic). 査読有
  25. Iwao Sato, Coverings of digraphs. *Far East J. Math. Sci. (FJMS)* 23 (2006), no. 3, 281–293. 査読有
  26. Iwao Sato, Edge zeta functions of graph coverings. *Ars Combin.* 81 (2006), 225–233. 査読有
  27. Iwao Sato, Spectra of line graphs of semiregular bipartite graphs. *Far East J. Math. Sci. (FJMS)* 23 (2006), no. 1, 137–144. 査読有
  28. Jin Ho Kwak and Iwao Sato, Zeta functions of line, middle, total graphs of a graph and their coverings. *Linear Algebra Appl.* 418 (2006), no. 1, 234–256. 査読有
  29. Iwao Sato,  $L$ -functions for line graphs of semiregular bipartite graphs. *Linear Algebra Appl.* 416 (2006), no. 2–3, 373–388. 査読有
  30. Iwao Sato and Jaehun Lee, Isomorphisms of connected cyclic abelian covers of symmetric digraphs. *Ars Combin.* 80 (2006), 129–139. 査読有
  31. Iwao Sato, Weighted Bartholdi zeta functions of graphs. *European J. Combin.* 27 (2006), no. 5, 644–657. 査読有
  32. Seiya Negami, Looseness ranges of triangulations on closed surfaces. *Discrete Math.* 303 (2005), no. 1–3, 167–174. 査読有
  33. Seiya Negami, Projective-planar double coverings of graphs. *European J. Combin.* 26 (2005), no. 3–4, 325–338. 査読有
  34. Atsuhiro Nakamoto, 5-Chromatic even triangulations on the Klein bottle. *Discrete Math.* 303 (2005), no. 1–3, 154–166. 査読有
  35. Ryuichi Mori and Atsuhiro Nakamoto, Diagonal flips in Hamiltonian triangulations on the projective plane. *Discrete Math.* 303 (2005), no. 1–3, 142–153. 査読有
  36. Kenji Koyama and Atsuhiro Nakamoto, Acute triangles in triangulations on the plane with minimum degree at least 4. *Discrete Math.* 303 (2005), no. 1–3, 104–116. 査読有
  37. Atsuhiro Nakamoto, Katsuhiro Ota and Mamoru Watanabe, On 3-coloring of plane triangulations. *Ars Combin.* 75

- (2005), 157-162. 査読有
38. Ken-ichi Kawarabayashi, Atsuhiko Nakamoto, Yoshiaki Oda and Mamoru Watanabe, Acute triangles in 4-connected maximal plane graphs. Discrete Math. 292 (2005), no. 1-3, 95-106. 査読有
  39. Iwao Sato, Bartholdi zeta functions of group coverings of digraphs. Far East J. Math. Sci. (FJMS) 18 (2005), no. 3, 321-339. 査読有
  40. Iwao Sato, Lifts of automorphisms of symmetric digraphs associated with cyclic abelian covers. III. J. Combin. Math. Combin. Comput. 52 (2005), 3-16. 査読有

[学会発表] (計 40 件)

1. Katsuhiro Ota, Forests in graphs, The 20th Workshop on Topological Graph Theory in Yokohama, 横浜国立大学 2008年11月28日.
2. Iwao Sato, Bartholdi zeta functions of hyper graphs, The 20th Workshop on Topological Graph Theory in Yokohama, 横浜国立大学 2008年11月26日.
3. Seiya Negami, Distinguishing number and re-embedding of graphs on surfaces, The 20th Workshop on Topological Graph Theory in Yokohama, 横浜国立大学 2008年11月26日.
4. Atsuhiko Nakamoto, Domatic number of triangulations on surfaces, The 20th Workshop on Topological Graph Theory in Yokohama, 横浜国立大学 2008年11月25日.
5. Ko Yamamoto, The distinguishing number of 4-regular quadrangulations on the Klein bottle, The 20th Workshop on Topological Graph Theory in Yokohama, 横浜国立大学 2008年11月25日.
6. 根上生也, どうやって平面被覆予想を解決するか, 第19回位相幾何学的グラフ理論研究集会, 横浜国立大学 2007年11月16日.
7. 山本 光, 球面上のn角形分割について, 第19回位相幾何学的グラフ理論研究集会, 横浜国立大学 2007年11月16日.
8. 佐藤 巖, Weighted Bartholdi zeta functions of graphs, 第19回位相幾何学的グラフ理論研究集会, 横浜国立大学 2007年11月15日.
9. 中本敦浩, トーラスの偶角形分割のN-変形とDehn twist, 第19回位相幾何学的グラフ理論研究集会, 横浜国立大学 2007年11月15日.
10. 太田克弘, Star coloring of cubic graphs, 離散数学とその応用研究集会 2007, 下呂市民会館 2007年8月8日.
11. 根上生也, どうやって平面被覆予想を解けばよいのか, 離散数学とその応用研究集会 2007, 下呂市民会館 2007年8月8日.
12. 佐藤 巖, Bartholdi zeta functions of some graphs, 離散数学とその応用研究集会 2007, 下呂市民会館 2007年8月7日.
13. 山本 光, 閉曲面上の全着色された三角形分割の対角変形, 離散数学とその応用研究集会 2007, 下呂市民会館 2007年8月7日.
14. 中本敦浩,  $K_6$ -Minors in triangulations on the double torus, 離散数学とその応用研究集会 2007, 下呂市民会館 2007年8月7日.
15. Seiya Negami, Around planar cover conjecture, International Workshop on Combinatorics 2007, The 21st Century COE Program at Keio, Integrative Mathematical Sciences, 慶応義塾大学 2007年6月7日.
16. Seiya Negami, The distinguishing number of triangulations on the projective plane, 38th Southeastern International Conference on Combinatorics, Graph Theory, and Computing, アメリカ合衆国, フロリダ 2007年3月9日.
17. Atsuhiko Nakamoto,  $K_6$ -Minors in triangulations on surfaces, 38th Southeastern International Conference on Combinatorics, Graph Theory, and Computing, アメリカ合衆国, フロリダ 2007年3月9日.
18. Katsuhiro Ota, Toughness and bipartite-minors in graphs, 38th Southeastern International Conference on Combinatorics, Graph Theory, and Computing, アメリカ合衆国, フロリダ 2007年3月9日.
19. 太田克弘, Recognizable colorings of paths and cycles, 第18回位相幾何学的グラフ理論研究集会, 横浜国立大学 2006年11月17日.
20. 中本敦浩, Chromatic number of even triangulations on the Klein bottle, 第18回位相幾何学的グラフ理論研究集会, 横浜国立大学 2006年11月17日.
21. 根上生也, 閉曲面上のグラフの識別可能性, 第18回位相幾何学的グラフ理論研究集会, 横浜国立大学 2006年11月16日.
22. 山本 光, 球面上の五角形分割, 第18

- 回位相幾何学的グラフ理論研究集会, 横浜国立大学 2006年11月16日.
23. Atsuhiko Nakamoto, Geometric realization of 5-connected triangulations of the Möbius band, International Workshop on Discrete Mathematics and its Applications, 茨城大学 2006年8月3日.
  24. Seiya Negami, 3-Connected planar graphs are 2-distinguishable with few exceptions, International Workshop on Discrete Mathematics and its Applications, 茨城大学 2006年8月2日.
  25. Iwao Sato, Bartholdi zeta functions of group coverings of digraphs, International Workshop on Discrete Mathematics and its Applications, 茨城大学 2006年8月2日.
  26. Katsuhiro Ota, Toughness of  $K_{a,r}$ -minors-free graphs, International Workshop on Discrete Mathematics and its Applications, 茨城大学 2006年8月1日.
  27. Seiya Negami, The distinguishing number of graphs embedded on surfaces, SIAM Conference on Discrete Mathematics, University of Victoria, カナダ, ビクトリア 2006年6月26日.
  28. Atsuhiko Nakamoto, Chromatic even triangulations on surfaces, SIAM Conference on Discrete Mathematics, University of Victoria, カナダ, ビクトリア 2006年6月26日.
  29. Seiya Negami, Looseness and re-embedding structures of triangulations on closed surfaces, 2nd Pacific Workshop on Discrete Mathematics, Tokai University Pacific Center, アメリカ合衆国, ハワイ 2005年12月8日.
  30. Atsuhiko Nakamoto, Geometric realization of projective triangulations with one face removed, 2nd Pacific Workshop on Discrete Mathematics, Tokai University Pacific Center, アメリカ合衆国, ハワイ 2005年12月8日.
  31. Iwao Sato, Weigthed zeta functions of graphs, 2nd Pacific Workshop on Discrete Mathematics, Tokai University Pacific Center, アメリカ合衆国, ハワイ 2005年12月8日.
  32. 根上生也, 閉曲面上の三角形分割の弛緩度と再埋蔵, 第17回位相幾何学的グラフ理論研究集会, 横浜国立大学 2005年11月25日.
  33. 山本 光, 奇三角形分割におけるグラフの変形について, 第17回位相幾何学的グラフ理論研究集会, 横浜国立大学 2005年11月25日.
  34. 中本敦浩, Geometric realization of a projective triangulation with one face removed, 第17回位相幾何学的グラフ理論研究集会, 横浜国立大学 2005年11月25日.
  35. 佐藤 巖, Lifts of automorphisms of symmetric digraphs associated with cycle ableian covers III, 第17回位相幾何学的グラフ理論研究集会, 横浜国立大学 2005年11月24日.
  36. Iwao Sato, Bartholdi zeta functions of graph coverings, Japan Worksho on Graph Theory and Combinatorics 2005 — in hornor of Hikoe Enomoto's 60th birthday, 慶応義塾大学 2005年6月21日.
  37. Seiya Negami, Looseness and independence number of maximal planar graphs, Japan Worksho on Graph Theory and Combinatorics 2005 — in hornor of Hikoe Enomoto's 60th birthday, 慶応義塾大学 2005年6月21日.
  38. Atsuhiko Nakamoto,  $N$ -Flips in even triangulations on surfaces, Japan Worksho on Graph Theory and Combinatorics 2005 — in hornor of Hikoe Enomoto's 60th birthday, 慶応義塾大学 2005年6月21日.
  39. Seiya Negami, Looseness and re-embedding structures of triangulations on closed surfaces, Graph Theory with Altitude, University of Colorado at Denver, アメリカ合衆国, デンバー 2005年5月19日.
  40. Atsuhiko Nakamoto, 3-Colorable even triangulations on closed surfaces, Graph Theory with Altitude, University of Colorado at Denver, アメリカ合衆国, デンバー 2005年5月19日.
- [図書] (計 4 件)
1. 根上生也, 『人に教えたい数学 —パズルを解くよりおもしろい』, ソフトバンク出版 2007年12月24日, 208ページ.
  2. 根上生也, 『トポロジカル宇宙[完全版] —ポアンカレ予想解決への道』, 日本評論社 2007年12月10日, 205ページ.
  3. 根上生也, 桜井進, 『計算しない数学, 計算する数学 —ホントの数学は自分の中にある』, 技術評論社 2007年10月25日, 200ページ.
  4. 根上生也, 『計算しない数学 —見えない

“答え”が見えてくる!』, 青春出版社  
2007年3月15日, 216ページ.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

根上生也 (NEGAMI SEIYA)

横浜国立大学・教育人間科学部・教授

研究者番号: 40164652

(2) 研究分担者

中本敦浩 (NAKAMOTO ATSUHIRO)

横浜国立大学・教育人間科学部・準教授

研究者番号: 20314445

(H19→H20: 連携研究者)

山本 光 (YAMAMOTO KO)

横浜国立大学・教育人間科学部・講師

研究者番号: 00293163

(H19→H20: 連携研究者)

太田克弘 (OTA KATSUHIRO)

慶応義塾大学・理工学部・教授

研究者番号: 40213722

(H19→H20: 連携研究者)

佐藤 巖 (SATO IWAO)

小山工業高等専門学校・一般科目・教授

研究者番号: 70154036

(H19→H20: 連携研究者)

(3) 連携研究者