

平成 21 年 6 月 1 日現在

研究種目：基盤研究 (C)

研究期間：2005 ～ 2008

課題番号：17540114

研究課題名 (和文) 距離正則グラフと部分グラフの構造

研究課題名 (英文) Structure of subgraphs in a distance-regular graph

研究代表者

平木 彰 (HIRAKI AKIRA)

大阪教育大学・教育学部・准教授

研究者番号：90294181

研究成果の概要：「任意の 2 点に対して、その 2 点を含み 2 点間の距離を直径とするような強閉 (Strongly closed) な部分グラフが存在する」という性質を持つ距離正則グラフを研究した。その具体例としては「Odd, Doubled Odd, Doubled Grassmann, Hamming, Dual polar, Hermitian forms」という距離正則グラフの無限系列に属するグラフがよく知られている。本研究においては、いくつかの条件の下で、そのような距離正則グラフは上記の無限系列に属するグラフのいずれかであることを証明した。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2005 年度	800,000	0	800,000
2006 年度	500,000	0	500,000
2007 年度	500,000	150,000	650,000
2008 年度	500,000	150,000	650,000
年度			
総計	2,300,000	300,000	2,600,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・数学一般 (含確率論、統計数学)

キーワード：代数的組合せ論、距離正則グラフ

1. 研究開始当初の背景

代数的な組合せ構造をグラフに表現したものの中には多くは距離正則という強い正則性を満たしている。また、代数構造の部分構造と表現されたグラフの対応する部分グラフの間には密接な関係がある。

これらのことから、距離正則グラフとその部分グラフの構造を調べることは、代数的組合せ構造とその部分構造を調べる上でとても重要である。

距離正則グラフの研究は主にその表現行列の持つ性質や、表現行列が生成する代数の研究が中心であり、グラフの構造に大きく踏み込んだ研究はあまりなされていなかった。特に、正則性の高い部分グラフを取り出すということに対する一般的な議論や手法は、ほとんど何もない状態であった。一方、実際に存在する例を調べれば、距離正則グラフの中に距離正則部分グラフたちが列をなして存在し、包含関係に関する美しい順序集合の束を形成しているものが多く存在している。したがっ

て、一般においてもグラフの構造の一部分を与えることによって、そこから正則性の高い部分グラフを取り出し、それらを組合せることによって、グラフが美しい部分グラフの束を持つようにグラフ全体の構造を構成できるのではないかと考えられる。これは距離正則グラフの研究において、構造から踏み込んだ新しい発想による研究であり「構造論」といえるものである。これまでの表現行列や表現代数を用いた「表現論」との融合によって距離正則グラフの研究が飛躍的な進展をとげることが期待される。

2. 研究の目的

(1) 「部分グラフを取り出す手法の改良。」

研究当初にあった手法が有効に活用できるためにはグラフのパラメーターに一定の条件が必要であった。さらに多くのグラフに対しても活用できるよう手法を改良することを目的とした。

(2) 「構造論に関する共同研究」

部分グラフを取り出す手法によって、いくつかの新しい結果が得られていた。これは「構造論」というべき新しい研究である。すでに多くの国内外の研究者と共同研究をはじめており、これら

を引き続き行っていくことによって、理論として確立し、それらが距離正則グラフの研究において、重要であることを広く知らすことを目的とした。

(3) 「代数的組合せ構造への応用」

代数的組合せ構造を表現した距離正則グラフにおいて、その部分グラフは組合せ構造における部分構造に対応している。それらの組合せ構造を専門に研究する研究者との共同研究によって、上記の手法から得られる距離正則グラフにおける結果が組合せ構造においてどのような結果を意味するのかを明らかにすることを目的とした。

3. 研究の方法

(1) 距離正則グラフとその部分グラフのパラメーターの関係について実際に存在する例について調べる。共通に成り立つような関係を見つけ出し、同様の関係が一般に成り立たないかを調べる。

(2) 距離正則グラフの研究者と共同研究をさらに活発に行う。特に海外の研究者と積極的な討論を行うことによって、更なる改良点や問題点を明確にする。

(3) 代数的組合せ構造を専門的に研究する研究者と討論を行うことで、その組合せ構造から得られた距離正則グラフとその部分グラフの関係が、もとの組合せ構造と部分構造のどの部分に対応をしているのかをひとつひとつ明確にしていく。どの性質が特に重要であるのかを見極めていく。

4. 研究成果

条件 (*) 「任意の2点に対して、その2点を含み、2点間の距離を直径とする強閉な部分グラフが存在する」をみたすような距離正則グラフの研究を行った。

得られた結果は次の通りである。

(1) 「2部正則部分グラフによる特徴付け」集合の部分集合族やベクトル空間の部分空間族に自然な形で定義された Odd, Doubled Odd, Doubled Grassmann という3つの距離正則グラフは部分集合の束や部分空間の束に対応して自然な形で部分グラフの束を含んでいる。特に、直径が偶数の部分グラフは全て2部正則という性質を満たしている。本研究においては「2部正則である部分グラフを含む」という条件の下でそのような距離正則グラフは上記の3つのグラフのいずれかであることを証明した。

(2) 「パラメーターによる特徴付け」Odd, Doubled Odd という2つの距離正則グラフに対して、距離正則性を表すパラメーター全てを与えたときグラフの特徴付けが可能であることは既に証明がなされていた。本研究においてはパラメーターのある一部分が与えられたならば、そこから部分グラフの存在性と、そのパラメーターが得られ、上記の結果を応用することで、元のグラフの特徴付けが可能であることを証明した。

(3) 「Delsarte clique graph の構造」距離正則グラフはその最小固有値によって clique (完全部分グラフ) のサイズの上限が与えられる。この上限を満たすものは Delsa

rte clique と呼ばれ、符号理論における完全正則符号という性質を持つ、興味深い研究対象である。知られている多くの距離正則グラフは「各辺が定数個の Delsarte clique に含まれる」という性質を満たしている。そのような性質を満たす距離正則グラフの研究を行い、Delsarte clique の完全正則符号としてのパラメーターから、距離正則グラフの正則性を示すパラメーターを表現する関係式を与えることに成功をした。また、あるパラメーターの値が小さいものに関しては、そのようなグラフを完全に分類することに成功をした。

(4) 「不等式と等号成立時の特徴付け」

条件 (*) を満たす距離正則グラフにおいて、ある部分構造が完全グラフとなるようなものを考察した。具体例としては、Odd, Doubled Odd, Hamming の 3 つの距離正則グラフが知られている。本研究においてはそのような距離正則グラフは上記の 3 つのグラフのいずれかであることを証明した。また、距離正則性を満たすパラメーターに対する一般的ないくつかの不等式を新たに発見した。これら、いくつかの不等式における等号成立条件によって、Hamming, Dual polar 2 つのグラフの特徴付けに成功をした。

(5) 「Design の構成」

条件 (*) を満たす距離正則グラフにおいて、与えられたある部分グラフを含み、直径が 1 つ大きい部分グラフ全体と 2 つ大きい部分グラフ全体が作り出す構造を数学的に考え、それが Design と呼ばれる代数構造となることを示した。(4) の結果で得られたいくつかの不等式はこの Design のパラメーターを計算することによっても得られることがわかり、等号成立条件も Design の言葉で解釈することができた。また、Design のパラメーターを考察することにより、さらにいくつかの距離正則グラフのパラメーターに関する新しい不等式を得ることに成功した。

(6) 「完全正則な部分構造」

条件 (*) を満たす距離正則グラフの具体例においては、その部分グラフが「完全正則 (Completely regular)」という符号理論における符号に対応した構造を持つ場合がある。完全正則な部分グラフを持つ距離正則グラフを考察し、部分グラフの完全正則性を表すパラメーターと距離正則グラフの正則性を示すパラメーターとの関係の公式化を行った。これを用いて、そのような距離正則グラフは一部の例外的な場合を除いては、Hamming, Dual

polar, Hermitian forms のいずれかのグラフであることを証明した。

(7) 「完全正則な部分構造の存在条件」

条件 (*) を満たす距離正則グラフのパラメーターが与えられた時、そのパラメーターから完全正則な部分構造が存在するかどうかを判定することに成功した。存在する場合には完全正則な部分構造の完全正則性を表すパラメーターを距離正則グラフの正則性を示すパラメーターから計算する公式を求めることに成功した。この結果を用いて、Hamming, Dual polar, Hermitian forms などのよく知られている距離正則グラフの族に対しては、完全正則な部分構造の存在が再証明された。また、いくつかの距離正則グラフの族には一般的に完全正則な部分構造が存在することが証明された。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 7 件)

1. A. HIRAKI, Application of the retracing method for distance-regular graphs, *European Journal of Combinatorics* 26, no. 5, 717-727, (2005), 査読有り.
2. A. HIRAKI, J. KOOLEN, A generalization of an inequality of Brouwer-Wilbrink, *Journal of Combinatorial Theory Ser. A* 109, no. 1, 181-188, (2005), 査読有り.
3. S. BANG, A. HIRAKI, J. KOOLEN, Improving diameter bounds for distance-regular graphs, *European Journal of Combinatorics*, 27, no. 1, 79-89, (2006), 査読有り.
4. A. HIRAKI, A Characterization of the Odd graphs and doubled Odd graphs with a few of their intersection numbers, *European Journal of Combinatorics*, 28, no. 1, 246-257, (2007), 査読有り.

5. S. BANG, A. HIRAKI, J. KOOLEN, Delsarte clique graphs, European Journal of Combinatorics, 28, no. 2, 501-516, (2007), 査読有り.
6. A. HIRAKI, A Characterization of the Hamming graphs by strongly closed subgraphs, European Journal of Combinatorics, 29, no. 1, 1603-1616, (2008), 査読有り.
7. A. HIRAKI, Strongly closed subgraphs in a distance-regular graph with $c_2 > 1$, Graphs and Combinatorics 24, no. 6, 537-550 (2008), 査読有り.

(2) 研究分担者

(3) 連携研究者

[学会発表] (計 5 件)

1. A. HIRAKI, Algebraic Combinatorics, An International Conference in Honour of Eiichi Bannai's 60th birthday, Sendai International Center, 仙台, 2006 年 6 月 26 日
2. 平木 彰, 第 2 4 回代数的組合せ論研究集会、近畿大学、2007 年 6 月 30 日
3. A. HIRAKI, Fourth Korea-Japan Workshop on Algebra and Combinatorics, POSTECH, (浦項、韓国), 2008 年 2 月 2 日
4. 平木 彰, 第 2 5 回代数的組合せ論研究集会、北海道大学、2008 年 6 月 23 日
5. A. HIRAKI, 6th Korea-Japan Workshop on Algebra and Combinatorics, 釜山国立大学, (釜山、韓国), 2009 年 2 月 10 日

[その他]

ホームページ: 大阪教育大学リポジトリ
<http://ir.lib.osaka-kyoiku.ac.jp/dspace/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

平木 彰 (HIRAKI AKIRA)
大阪教育大学・教育学部・准教授
研究者番号: 90294181