

令和 5 年 6 月 4 日現在

機関番号：12601

研究種目：基盤研究(B) (一般)

研究期間：2017～2021

課題番号：17H02831

研究課題名(和文) F特異点論を用いた正標数の線形系の一般元の研究

研究課題名(英文) A study of general members of linear systems via the theory of F-singularities

研究代表者

高木 俊輔 (Takagi, Shunsuke)

東京大学・大学院数理科学研究科・教授

研究者番号：40380670

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 12,250,000円

研究成果の概要(和文)：本研究課題では、主に正標数の代数多様体及び特異点の変形問題に取り組んだ。大域F分裂多様体、大域F正則多様体上で小平の消滅定理の拡張が成り立つことを証明し、それを用いて高々通常二重点しか持たない3次元大域F分裂ファノ多様体の平坦変形について調べた。さらに、F純特異点、F正則特異点などのF特異点の変形についても調べた。特に、標数0のQ-Gorenstein正規特異点 (X, x) が与えられたとき、その法 p 還元 (X_p, x_p) がF純特異点であるような素数 p が一つでも存在すれば、 (X, x) は対数標準特異点であることを証明した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

ホッジ理論などの解析的手法が使えないことから、正標数のファノ多様体の変形についてはほとんど何もわかっていなかった。大域F分裂多様体の枠組みで問題を考えることで、標数0の結果を含意するような正標数の結果を得ることに成功した。

対数標準特異点は極小モデル理論に現れる特異点の中で最も広いクラスであるが、特異点解消を用いて定義されるため、与えられた特異点が対数標準特異点かどうか判定することは難しかった。しかし、本研究成果によって、計算ソフトウェアを使って確認できる十分条件が得られた。

研究成果の概要(英文)：In this research project, we mainly studied the deformations of algebraic varieties and singularities defined over a field of positive characteristic. We have two main results. (i) We proved vanishing theorems on globally F-split and globally F-regular varieties and used them to study the flat deformation of a globally F-split Fano 3-fold. (ii) We studied the deformations of F-pure and F-regular singularities. We proved if there exists a single prime number p such that the modulo p reduction of a Q-Gorenstein normal singularity (X, x) is F-pure, then (X, x) is log canonical.

研究分野：代数幾何学

キーワード：特異点 F特異点 正標数 可換環論 極小モデル理論 ファノ多様体 変形

1. 研究開始当初の背景

F 特異点とはフロベニウス写像を用いて定義される正標数の特異点の総称であり F 正則特異点、F 純特異点はその重要なクラスである。F 特異点論は 1970 年代の可換環論に起源を持つが、近年正標数の極小モデル理論の基盤として急速に進展しており、極小モデル理論に現れる特異点の研究に応用が期待されている。特に、F 純特異点は法 p 還元を介して標数 0 の対数標準特異点と対応すると予想されており、研究代表者と藤野修は 3 次元孤立特異点の場合にこの予想を肯定的に解決した。この予想が正しければ、正標数の手法を用いて標数 0 の対数標準特異点の性質を調べることができるようになるため、さらなる進展が期待されている。

また、F 純特異点、F 正則特異点の大域版である大域 F 分裂多様体、大域 F 正則多様体の研究も注目を集めつつある。これらはフロベニウス射の分裂を用いて定義される正標数の代数多様体であり、それぞれカラビ・ヤウ型、ファノ型多様体である。特に、大域 F 正則多様体の幾何学的研究は、正標数のファノ多様体研究の観点からも重要であるが、十分には進んでないのが現状である。

2. 研究の目的

- (1) 本研究課題の申請時の目的の一つは、F 特異点論を用いて、極小モデル理論に現れる特異点を持つ準射影多様体の一般の超平面切断を調べることであった。より具体的には、次の問いに取り組む。「標準特異点 (resp. 対数的末端特異点, 対数的標準特異点) しか持たないような、正標数の代数閉体上で定義された 3 次元準射影多様体 X の一般の超平面切断 H は標準特異点 (resp. 対数末端特異点, 対数標準特異点) しか持たないか？」
- (2) F 特異点論を整備することは、極小モデル理論に現れる特異点を調べる上でも重要である。そこで、F 特異点論において中心的な役割を果たす判定イデアルに関する予想に取り組む。判定イデアルには有限判定イデアルと巨大判定イデアルの 2 種があるが、両者は一致すると予想されている。この予想を数値的 Q-Gorenstein 多様体の場合に肯定的に解決することを目指す。
- (3) 大域 F 正則多様体の幾何学的性質を体系的に調べることで、正標数のファノ多様体の研究に寄与することを目指す。大域 F 正則多様体上で小平の消滅定理が成り立つことが知られているが、標数 0 の双有理幾何学では小平の消滅定理の様々な拡張が重要な役割を果たす。そこで、大域 F 正則多様体上で小平の消滅定理の拡張が成り立つことを証明し、それを用いて Fano 多様体の平坦変形を調べる。
- (4) Ma・Schwede は、標数 0 の Q-Gorenstein 正規特異点 (X, x) が与えられたとき、その法 p 還元が F 正則となる素数 p が一つでも存在すれば、 (X, x) は対数末端特異点であることを証明した。この結果の対数標準特異点版を証明することを目指す。これが証明されれば、計算ソフトウェアを使って確認可能な、与えられた特異点が対数標準特異点であるための十分条件が得られることになる。
- (5) 標数 0 の対数末端特異点、対数標準特異点の変形を調べる。これらの特異点は高次元では小変形で保たれないことが知られているが、これは Q-Gorenstein 性が崩れるためである。そこで、生成ファイバーの Q-Gorenstein 性を仮定して、これらの特異点の変形を考察する。

3. 研究の方法

- (1) 対数末端特異点の場合を考える。Schwede・Zhang によって F 正則特異点に対する Bertini の定理が証明されており、また F 正則特異点是对数末端特異点であることから、 X の任意の余次元 2 の点での局所環が F 正則特異点であることを示せばよい。この局所環の剰余体は完全体でないため、非完全体上の特異点の考察が必要になる。
- (2) Aberbach・MacCrimmon, 原伸生, Karen Smith らによって、予想の Q-Gorenstein の場合は正しいことが知られている。彼らの証明、特に原の証明を数値的 Q-Gorenstein の場合に拡張することを考える。
- (3) 藤野修はトーリック多様体の m 倍写像を駆使して、トーリック多様体上で様々な消滅定理が成り立つことを証明した。トーリック多様体は大域 F 正則多様体の典型例なので、藤野の証明を参考にして、大域 F 正則多様体上で小中型の消滅定理を証明する。また、3 次元の場合に、Cartier 作用素を用いて秋月・中野型の消滅定理を証明することを目指す。
- (4) Ma・Schwede は、André のアイデアを発展させて、F 特異点論を下敷きにした混標数の特異点論を導入し、様々な応用を得た。彼らの理論を改良し、有理整数環 Z 上有限型な環 (混標数の特異点) とその法 p 還元を直接比較することで、対数標準特異点と F 純特異点の対応を精密化することを目指す。
- (5) de Fernex・Hacon は、食い違い係数の定義を Q-Gorenstein とは限らない正規多様体上に拡張した。この食い違い係数を用いることで、付置論的対数末端特異点、付置論的対数標準特異点が定義される。これらの特異点が大変形で保たれることを示す。

4. 研究成果

(1) 3次元準射影多様体の一般の超平面切断の研究

佐藤謙太との共同研究において、「研究の目的」(1)の問いを部分的に解決した。Xが標準特異点しか持たなければ、Hも標準特異点しか持たないことを証明した。また、Xが対数端末特異点しか持たず、標数が5より大きければ、Hも対数端末特異点しか持たないことを証明した。

(2) 数値的 Q-Gorenstein 多様体の判定イデアルの研究

「研究の目的」(2)の予想を数値的 Q-Gorenstein の場合に肯定的に解決した。証明には、密着閉包と数値的 Q-Cartier 因子の付置論的特徴づけを用いる。

(3) 大域 F 正則多様体上の消滅定理の研究

Kollar は標数 0 の非特異射影多様体上の半豊富な直線束に対する単射性定理を証明した。この Kollar の単射性定理は小平の消滅定理の拡張であり、正標数では一般には成り立たない。研究代表者と権業善範は、大域 F 正則多様体上で Kollar の単射性定理が成り立つことを証明した。さらに佐藤謙太との共同研究では、孤立特異点しか持たない 3 次元大域 F 正則射影多様体上の非常に豊富な直線束に対し、秋月・中野の消滅定理が成り立つことを証明した。さらにこの応用として、次の 2 つの結果を得た。

- (a) X を標数 $p > 0$ の代数閉体上定義された、高々通常二重点しか持たない 3 次元大域 F 分裂ファノ多様体とし、K をその標準因子とする。このとき、 $-iK$ が非常に豊富であるような 1 以上 p 以下の整数 i が存在すれば、X は非特異ファノ多様体に平坦変形できることを証明した。これは並河良典氏の結果の正標数への拡張に当たる。
- (b) Y を標数 $p > 0$ の完全体上定義された、高々完全交叉孤立特異点しか持たない 3 次元大域 F 正則射影多様体とする。このとき、任意の p 以下の自然数 t に対し、Y の t 次 thickening が小平の消滅定理を満たすことを証明した。これは Bhatt-Blickle-Lyubeznik-Singh-Zhang の結果の正標数 3 次元の場合への拡張に当たる。

(4) F 正則特異点、F 純特異点の変形の研究

佐藤謙太との共同研究において、Ma・Schwede が導入した BCM 判定イデアルの定義を改良することで、標数 0 の Q-Gorenstein 正規特異点 (X, x) が与えられたとき、その法 p 還元が F 純となる素数 p が一つでも存在すれば、 (X, x) は対数標準特異点であることを証明した。また BCM 判定イデアルの代わりに古典的な判定イデアルを用いることで、2 次元 F 正則特異点が小変形で保たれることも証明した。

(5) 対数端末特異点、対数標準特異点の変形の研究

佐藤謙太との共同研究において、付置論的対数端末特異点の逆同伴を証明することで、生成ファイバーが Q-Gorenstein であれば、対数端末特異点は小変形で保たれることを証明した。また、対数標準特異点についても類似の結果が成り立つことを証明した。これらは Esnault-Viehweg、石井志保子の結果の拡張になっている。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計10件（うち査読付論文 10件 / うち国際共著 2件 / うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Kenta Sato and Shunsuke Takagi	4. 巻 11
2. 論文標題 Deformations of log terminal and semi log canonical singularities	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Forum of Mathematics, Sigma	6. 最初と最後の頁 E35
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1017/fms.2023.28	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 Kenta Sato and Shunsuke Takagi	4. 巻 19
2. 論文標題 General hyperplane sections of threefolds in positive characteristic	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu	6. 最初と最後の頁 647-661
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1017/S1474748018000166	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Yoshinori Gongyo and Shunsuke Takagi	4. 巻 5
2. 論文標題 Kollar's injectivity theorem for globally F-regular varieties	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 European Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 872-880
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s40879-018-0230-4	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Shunsuke Takagi	4. 巻 in press
2. 論文標題 Finitistic test ideals on numerically Q-Gorenstein varieties	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Algebra	6. 最初と最後の頁 in press
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jalgebra.2018.08.003	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Yoshinori Gongyo, Yusuke Nakamura and Hiromu Tanaka	4. 巻 21
2. 論文標題 Rational points on log Fano threefolds over a finite field	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of the European Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 3759-3795
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4171/JEMS/913	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Yusuke Nakamura and Hiromu Tanaka	4. 巻 156
2. 論文標題 A Witt Nadel vanishing theorem for threefolds	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Compositio Mathematica	6. 最初と最後の頁 435-475
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1112/S0010437X1900770X	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Mircea Mustata, Yusuke Nakamura	4. 巻 712
2. 論文標題 A boundedness conjecture for minimal log discrepancies on a fixed germ	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Contemporary Mathematics	6. 最初と最後の頁 287-306
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1090/conm/712/14351	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Kenta Hashizume, Yusuke Nakamura, Hiromu Tanaka	4. 巻 -
2. 論文標題 Minimal model program for log canonical threefolds in positive characteristic	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Mathematical Research Letters	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Shunsuke Takagi and Kei-ichi Watanabe	4. 巻 31
2. 論文標題 F-singularities: applications of characteristic p methods to singularity theory	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Sugaku Expositions	6. 最初と最後の頁 1-42
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1090/suga/427	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計14件 (うち招待講演 12件 / うち国際学会 9件)

1. 発表者名 Shunsuke Takagi
2. 発表標題 Pure subrings of KLT singularities and BCM test ideals
3. 学会等名 Resolutions in Local Algebra and Singularity Theory (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 高木 俊輔
2. 発表標題 正則有限被覆を持つ特異点の因子類群について
3. 学会等名 可換環論の新しい融合セミナー (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Shunsuke Takagi
2. 発表標題 Kodaira vanishing for thickenings of globally F-regular varieties
3. 学会等名 IIT Bombay Virtual Commutative Algebra Seminar (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Shunsuke Takagi
2. 発表標題 Vanishing theorems on globally F-regular varieties
3. 学会等名 Special Conference on Commutative Algebra and its Interaction with Algebraic Geometry (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Shunsuke Takagi
2. 発表標題 Kodaira vanishing for thickenings of globally F-regular threefolds
3. 学会等名 第41回可換環論シンポジウム (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Shunsuke Takagi
2. 発表標題 Weak Akizuki-Nakano vanishing for globally F-split 3-folds
3. 学会等名 Tokyo-Seoul Conference in Mathematics 2019 -Algebraic Geometry- (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Shunsuke Takagi
2. 発表標題 On threefolds of globally F-regular type
3. 学会等名 AMS Spring Central and Western Sectional Meeting, Special Session on Commutative Algebra and its Environs (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Shunsuke Takagi
2. 発表標題 Test ideals on numerically \mathbb{Q} -Gorenstein rings
3. 学会等名 Singularities and Homological Aspects of Commutative Algebra (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Shunsuke Takagi
2. 発表標題 Vanishing theorems on globally F -regular varieties
3. 学会等名 Positivity in Algebraic Geometry (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 高木 俊輔
2. 発表標題 代数多様体の特異点論と正標数の手法
3. 学会等名 日本数学会2019年度年会 (招待講演) (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 高木 俊輔
2. 発表標題 General hyperplane sections of threefolds in positive characteristic
3. 学会等名 第4回杜の都代数幾何学研究集会 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 高木 俊輔
2. 発表標題 Finitistic test ideals on numerically Q-Gorenstein varieties
3. 学会等名 第30回可換環論セミナー
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 高木 俊輔
2. 発表標題 正標数の可換環論におけるフロベニウス射を用いた手法
3. 学会等名 可換環論と数論幾何の新展開～ホモロジカル予想を通じて～（招待講演）
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Shunsuke Takagi
2. 発表標題 On F-pure thresholds
3. 学会等名 Commutative Algebra and Related Topics（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

<p>Shunsuke Takagi http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~stakagi/ 權業 善範(Yoshinori Gongyo) https://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~gongyo/ Yusuke Nakamura https://sites.google.com/site/ynakamuraagmath/</p>

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究分担者	権業 善範 (Gongyo Yoshinori) (70634210)	東京大学・大学院数理科学研究科・准教授 (12601)	
研究分担者	中村 勇哉 (Nakamura Yusuke) (20780034)	東京大学・大学院数理科学研究科・助教 (12601)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計2件

国際研究集会 Algebraic Geometry in Positive Characteristic and Related Topics	開催年 2018年～2018年
国際研究集会 第39回可換環論シンポジウム	開催年 2017年～2017年

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関