

令和 5 年 6 月 11 日現在

機関番号：12608

研究種目：基盤研究(B)（一般）

研究期間：2017～2021

課題番号：17H02839

研究課題名（和文）ローレンツ空間型の曲面・超曲面の特異点

研究課題名（英文）Singularities of surfaces and hypersurfaces in Lorentzian space forms

研究代表者

山田 光太郎（Yamada, Kotaro）

東京工業大学・理学院・教授

研究者番号：10221657

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 13,740,000円

研究成果の概要（和文）：3次元ミンコフスキー空間の零平均曲率曲面を含むクラスに対して、誘導計量が退化する点（光的点）をもてば、曲面は光的直線を含むという「直線定理」を、ローレンツ多様体の超曲面に一般化し、応用としてベルンシュタイン型定理の拡張、光的超曲面の特徴付けを行った。曲面の解析的延長に関する一般論を整備し、ド・ジッター空間の平均曲率1の曲面のうち「カテナイド」とよばれるクラスの解析的延長を明示的に記述し、さらなる解析的延長を持たないことを示した。曲線をカスプ辺にもつ曲面を構成する問題を考察し、その等長類の個数を決定した。同様の問題を「曲線折り紙」について考察し、与えられた曲線を折り目にもつ折り紙の個数を決定した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

ローレンツ多様体の因果特性が変化する超曲面はさまざまな例が知られている。また、そのうち解析的延長も持つものも多く知られているが、それらを一般的な視点から記述し、延長不可能性について論じた研究は少なく、学術的に重要なものである。また、これらの対象は自然現象の記述として現れることが多く、他分野への影響も期待される。

研究成果の概要（英文）：The line theorem for a class of surfaces containing zero mean curvature surfaces in Minkowski 3-space, which states that such a surface contains a light-like line if it contains light-like point, is generalized for hypersurfaces in Lorentzian manifolds. As applications, an extension of the Bernstein-type theorem, and a classification of light-like hypersurfaces are obtained. Under a formulation on analytic extensions of surfaces, the analytic extensions of catenoids in de Sitter 3-space are determined, and proved that they have no further extensions. Number of isometry class of surfaces having a given space curve as their cuspidal edges, and number of curved paper folding having a given curve as their creases, are determined.

研究分野：微分幾何学

キーワード：微分幾何学 ローレンツ多様体 直線定理

1. 研究開始当初の背景

3次元ローレンツ空間型の曲面，とくにローレンツ・ミンコフスキー空間の極大曲面（平均曲率零の空間的曲面）や，3次元ド・ジッター空間の平均曲率1の曲面は一般に特異点をもつ．これらの中にはパラメータ表示が固有写像を与えず，解析的な延長をもつ例がしばしば現れる．とくに，極大曲面については，解析的延長がもとの曲面と異なる因果特性をもつ（型変化する延長）ことがある．

2. 研究の目的

解析的延長をもつ曲面や，因果特性が変化する曲面や超曲面の一般的性質を解析し，適切な曲面のクラスを設定し，例の構成・分類を行う．また，ある種の流体の運動方程式，重力場方程式のコーシー条件に現れる超曲面など，物理現象との関連を明らかにする．

3. 研究の方法

3次元ローレンツ・ミンコフスキー空間の零平均曲率曲面でその因果特性が変化するものうち，ジェネリックなものに適切なクラスを設定して分類を行う．ジェネリックでないものには数多く例が存在することを示す．また，3次元ド・ジッター空間の特異点を許す平均曲率1の曲面（CMC-1面）の解析的延長の具体的な例（ド・ジッター・カテノイドを中心に）を解析する．これらの成果を踏まえ，零平均曲率方程式と流体の運動など物理現象との関係の解明；零平均曲率曲面が光的直線を含む条件の決定；ド・ジッター空間のCMC-1面の弱完備なエンドでの挙動の分類を目指す．さらに，解析的延長をもつ曲面の具体例から，解析的延長の存在・非存在を論じるための数学的な基礎付けを検討する．研究を実施するために，すでに共同研究を継続している研究分担者（梅原雅顕）をはじめ，ウェイン・ラスマン，佐治健太郎，國分雅敏，赤嶺新太郎，本田淳史，直川耕佑ら国内研究協力者，Seong-Deog Yang（高麗大学），Udo Hertrich-Jeromin（TU-Wien）ら国外の研究協力者との連絡・討論・意見交換を密に行う．とくに研究期間中の移動制限・集会制限に対応し，遠隔にて討論・打ち合わせが可能となるような環境整備を行った．

4. 研究成果

- 3次元ローレンツ・ミンコフスキー空間の零平均曲率曲面を含むクラスに対して，適切な条件のもと，誘導計量が退化する点（光的点）をもてば，曲面はその点を通る光的直線を含む，という「直線定理」を，一般のローレンツ多様体の超曲面にまで一般化した（梅原雅顕，赤嶺新太郎，代表者）．

また，応用として，(1) 3次元ローレンツ・ミンコフスキー空間の零平均曲率曲面に対するCalabiのBernstein型定理を拡張した（梅原，赤嶺，本田淳史，代表者）．(2) ローレンツ多様体の光的超曲面である種の完備性を満たすものが全測地的となることを示した（梅原，赤嶺，本田，代表者）．

- 3次元ド・ジッター空間の平均曲率1の曲面のうち「カテノイド」とよばれるクラスには解析的延長をもつものがある．その解析的延長を明示的に記述し，それ以外のカテノイドには

延長が存在しないことを，解析的延長不可能であるという概念を整備した上で，示した（藤森祥一，國分雅敏，川上裕，ウェイン・ラスマン，梅原，Seong-Deog Yang，代表者）．その過程で，可微分写像の局所的な固有性に関する議論を整備した（佐治健太郎，直川耕佑，本田，梅原，代表者）．

- ユークリッド空間の曲線を「延長」する問題として，曲線をカスプ辺にもつような曲面を構成する問題を考察し，その等長類が一般に 4 種類あることを示した（本田，直川・佐治・梅原・代表者）．また，同様の問題を紙の「曲線折り紙」について考察し，あたえられた曲線を折り目にもつ折り紙が一般に 4 種類あることを示した（本田，直川・佐治・梅原・代表者）．

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計10件（うち査読付論文 10件 / うち国際共著 1件 / うちオープンアクセス 6件）

1. 著者名 Shoichi Fujimori, Yu Kawakami, Masatoshi Kokubu, Wayne Rossman, Masaaki Umehara and Kotaro Yamada	4. 巻 62
2. 論文標題 Analytic extension of exceptional constant mean curvature one catenoids in de Sitter 3-space.	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Mathematical Journal of Okayama University	6. 最初と最後の頁 179-195
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Akamine S., Umehara M., Yamada K.	4. 巻 7
2. 論文標題 Improvement of the Bernstein-type theorem for space-like zero mean curvature graphs in Lorentz-Minkowski space using fluid mechanical duality	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Proceedings of the American Mathematical Society, Series B	6. 最初と最後の頁 17 ~ 27
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1090/bproc/44	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Honda Atsufumi, Naokawa Kosuke, Saji Kentaro, Umehara Masaaki, Yamada Kotaro	4. 巻 121
2. 論文標題 Curved foldings with common creases and crease patterns	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Advances in Applied Mathematics	6. 最初と最後の頁 102083 ~ 102083
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.aam.2020.102083	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Akamine S., Umehara M., Yamada K.	4. 巻 7
2. 論文標題 Improvement of the Bernstein-type theorem for space-like zero mean curvature graphs in Lorentz-Minkowski space using fluid mechanical duality	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Proceedings of the American Mathematical Society, Series B	6. 最初と最後の頁 17 ~ 27
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1090/bproc/44	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Fujiori S., Kawakami, Y., Kokubu, M., Rossman, W., Umehara M., Yamada, K.	4. 巻 62
2. 論文標題 Analytic extension of exceptional constant mean curvature one catenoids in de Sitter 3-space	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Mathematical Journal of Okayama University	6. 最初と最後の頁 179-195
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Akamine Shintaro, Umehara Masaaki, Yamada Kotaro	4. 巻 95
2. 論文標題 Space-like maximal surfaces containing entire null lines in Lorentz-Minkowski 3-space	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Proceedings of the Japan Academy, Series A, Mathematical Sciences	6. 最初と最後の頁 97 ~ 102
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3792/pjaa.95.97	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Honda, A., Naokawa, K., Umehara, M., Yamada, K.	4. 巻 48
2. 論文標題 Isometric realization of cross caps as formal power series and its applications	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Hokkaido Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 1-44
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Shoichi Fujimori, Udo Hertrich-Jeromin, Masatoshi Kokubu, Masaaki Umehara and Kotaro Yamada	4. 巻 186
2. 論文標題 Quadrics and Scherk towers	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Monatshefte fuer Mathematik	6. 最初と最後の頁 249--279
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00605-017-1075-5	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Masaaki Umehara and Kotaro Yamada	4. 巻 Online First
2. 論文標題 Hypersurfaces with light-like points in a Lorentzian manifold	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Journal of Geometric Analysis	6. 最初と最後の頁 1-33
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s12220-018-00118-7	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Masaaki Umehara and Kotaro Yamada	4. 巻 211
2. 論文標題 Surfaces with light-like points in Lorentz-Minkowski 3-space with applications	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Springer Proceedings in Mathematics & Statistics	6. 最初と最後の頁 253--273
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/978-3-319-66290-9_14	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計0件

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究分担者	梅原 雅頭 (Umehara Masaaki) (90193945)	東京工業大学・情報理工学院・教授 (12608)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------