

令和 5 年 6 月 25 日現在

機関番号：14301

研究種目：基盤研究(B) (一般)

研究期間：2017～2020

課題番号：17H02841

研究課題名(和文)被覆モノポール写像度の構成とその応用

研究課題名(英文)Construction of the covering monopole map and its applications

研究代表者

加藤 毅 (Kato, Tsuyoshi)

京都大学・理学研究科・教授

研究者番号：20273427

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 11,300,000円

研究成果の概要(和文)：1.無限巡回群の被覆モノポール写像度を特定した。2.有限伝播性を持つユニタリ作用素のホモトピータイプを決定した。3. $K3$ 上のSWモジュライ空間を変形することにより、exotic R 纏/ある種の性質を満たす完備リーマン計量が存在し得ないことを示した。4.族のSW理論を応用することで、コンパクト4次元多様体をファイバーにもつコンパクトなファイバー束であり、ファイバー空間、基底空間、全空間はすべて微分可能多様体であるような位相的ファイバー束であり、かつファイバー束としては微分可能でない例を与えた。5.SW理論のmod2シンプルタイプ予想を導入しある種の条件のもとではその予想が成立することを示した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

4次元多様体上の微分構造に対して、さまざまなアプローチによる研究を遂行した。特に、族の4次元多様体上の微分構造や、被覆空間上の微分構造に関して、新しい視点を与えた。また、SW不変量の情報を落としたところで、代数トポロジーでこれまで深く研究されてきたホモトピー論を適用することが本格的に可能であることを示したことで、今後の代数トポロジーと微分トポロジーのより深い融合研究への突破口を与えた。

研究成果の概要(英文)：1. We found out the covering monopole degree for the infinite cyclic covering case. 2. We determined homotopy type of the group of finitely propagated unitary operators. 3. We verified non-existence of complete Riemannian metrics with certain properties on the exotic R by deforming SW moduli spaces on $K3$ surface. 4. We presented an example of a compact topological fiber bundle whose total space, the fiber and the base are all smoothable but is non-smoothable as a fiber bundle by applying the family version of SW theory. 5. We introduced mod2 version of the simple type conjecture in SW theory and verified it for some classes of smooth 4-manifolds.

研究分野：非可換幾何学，ゲージ理論

キーワード：サイバーク・ウィッテン理論 被覆モノポール写像 有限伝播性を持つユニタリ作用素 非コンパクト空間 ファイバー束の微分構造 シンプルタイプ予想

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

1. 研究開始当初の背景

コンパクト 4 次元多様体の被覆空間上でモノポール写像の構成を行いさらにその写像度を計算することが目的である。assembly 写像とよばれる指数写像は K 群の間の写像として与えられ、指数に関する高次の情報を含む。その手法を、被覆空間上のモノポール写像に適用する。その構成は、形式的には既に与えられているものの、解析的な取り扱いにはまだ多くの困難が残っている。線形化写像がフレドホルムではないことが大きな理由であるが、正曲率などの条件下ではその構成を与えることができていた。また一般的な枠組みについてはそのアイデアが与えられてはいたものの、具体例での計算については全く手がついていなかった。特に、その応用として aspherical $10/8$ 不等式が一般の 4 次元分類多様体に対して成立するという予想を導くことができていた。コンパクトスピン 4 次元多様体に対してモノポール写像を用いた、古田による $10/8$ 予想の証明を、被覆空間上で展開できれば、Singer 予想と組み合わせることで aspherical $10/8$ 不等式を示すことができることが分かっていた。基本群が residually finite の場合は、有限被覆を無限回与え、各有限被覆上で古田の $10/8$ 不等式を適用し、さらにリュックによる L^2 ベッチ数の収束定理を適用することで、被覆 $10/8$ 不等式を導くことができる。一方で、この手法はコンパクト多様体の議論を本質的に用いており、residually finite ではないケースには全く適用できないでいた。本研究プロジェクトは、無限被覆空間上で L^2 ベッチ数を用いた $10/8$ 不等式を導くこと、それを用いて aspherical $10/8$ 不等式を導くことが最終的な目標である。

2. 研究の目的

コンパクト 4 次元多様体の普遍被覆空間上でモノポール写像の構成を行う。assembly 写像とよばれる指数写像は K 群の間の写像として与えられ、指数に関する高次の情報を含む。それをモジュライ空間の接空間上のファミリーの写像と見なすことで、モジュライ空間自身を用いた非線形 assembly 写像の構成は、形式的にはすでに与えられているものの、解析的な取り扱いにはまだ多くの困難が残っている。線形化写像がフレドホルムではないことが大きな理由であるが、正曲率などの条件下ではその構成を与えることができていた。ここではより一般の 4 次元多様体のクラスに対して、モノポール写像の構成を行い、高次の写像度を K 群の間の写像として与える。さらにその応用として、4 次元分類空間の位相的制約を与える、特性数の間の不等式を示す。また assembly 写像を用いてその写像度の幾何学的な再構成も行う。無限被覆空間上で L^2 ベッチ数を用いた $10/8$ 不等式を導くことが最終的な目標であり、それを用いて aspherical $10/8$ 不等式を導くことが目的となる。それを実行するために、無限被覆空間上でモノポール写像の局所有限次元近似の手法を導入する。局所有限次元化された写像を用いて、Higson-Kasparov-Trout らの意味による無限次元ヒルベルト空間上のボット周期性定理に現れる作用素環の K 群の間の準同型を構成する。さらにその写像度を与えるような元の構成を行いそこに現れるある種の整数性を見つけ出すことが目的である。

3. 研究の方法

被覆モノポール写像の理論を展開するためには、ゲージ理論や代数トポロジーの専門家と共同研究を行うことが効果的である。ここでの研究は、それに必要とされる理論整備に向けて、個別のテーマごとに研究を行なった。特に Higson-Kasparov-Trout らの意味による無限次元ヒルベルト空間上のポット周期性定理に現れる作用素環の K 群の計算は非常に難しい。そのため、その K 群を近似するような別の枠組みによる代数トポロジーの手法を導入する。そのような代数トポロジーの手法はまだ開発途中のものであり、近年 Kitaev らが導入した有限伝播自己同型写像のホモトピー論を発展させることが有効である。その枠組みは非常に抽象的であるため、具体的なとっかかりとして、有限被覆空間上での同変モノポール写像の写像度の計算を行い、それをどのように無限群作用に拡張できるか、手探りでの代数トポロジーの手法開発を行なっていく。

4. 研究成果

被覆モノポール写像の構成について研究を行った。これまでに以下の研究成果があった。

(1) 無限次元空間の間の強プロパー写像に対して、対応する作用素代数とそれらの K 群の間の誘導写像の構成を行った。Higson-Kasparov-Trout らの意味による無限次元ヒルベルト空間上のポット周期性定理に現れる作用素環に対して、局所有限次元化された写像によって引き戻しが与えられるための十分条件を与えた。この手法は、必ずしも被覆モノポール写像のみに適用されるものではなく、より一般の枠組みで与えられている。

(2) L^2 コホモロジーが関わるある性質を仮定した元で、被覆モノポール写像が局所強プロパー写像であることを示した。 L^2 コホモロジーに関するある種の条件のもとで、被覆モノポール写像が局所強プロパーであることを示した。これにより(1)の枠組みに適用できる例が与えられた。その解析には非コンパクト空間特有に現れる現象を解析していくことが必要となる。

被覆モノポール写像度の具体的な計算に関する研究を行なった。

(3) 高田土満氏との共同研究により、テストケースとして基本群が有限巡回群の場合に、ユニタリ表現論を用いて計算を行った。一般の有限群の場合も扱ったが、特に位数が奇数の場合の有限巡回群の場合が最も計算が進み、実際の写像度まで計算を行うことができた。基本群が無限巡回群の場合、被覆モノポール写像度は、有限巡回被覆 4 次元多様体の列の極限と見なすことで、無限巡回群の場合の被覆モノポール写像度に相当するものを特定することができた。

その形態は表現環の無限テンソル積で与えられ、これまでに既存の代数トポロジーでの理論整備が与えられていない状況であった。そこで、表現環の無限テンソル積上の自己同型群のホモトピータイプを決定するための研究を行なってきた。一般に、有限次元代数の無限テンソル積上の有限伝播自己同型写像群が関わるトポロジーに関する研究と、無限次元ヒルベルト空間に作用する有限伝播性を持つユニタリ作用素のトポロジーに関する研究は、ある程度までは並行して進めることができ、さらに後者の方は多少扱いが易しいという側面がある。そのため、まずは後者の群のホモトピータイプの研究を行なった。

(4) 岸本大祐氏・蔦谷充伸氏との共同研究により、無限次元ヒルベルト空間に作用する有限伝播性を持つユニタリ作用素のホモトピータイプの決定、さらにその群の分類空間のホモトピータイプを決定することに成功した。一般にユニタリ作用素のなす群とその周密な部分ユニタリ群のホモトピー型は全く異なる場合がある。例えば $U(H)$ と $U(\hat{R}^{\infty})$ は、前者が可縮であるのに対して後者は奇数次のホモトピー群は \mathbb{Z} である。有限伝播有界作用素を完備化すると、作用素代数でよく知られた一様ロー代数を与えるが、それらのホモトピー型が一致するかどうかはこれまでわかっていなかった。我々の研究により、その埋め込み写像がホモトピー同値を与えることを初めて明らかにした。

コンパクト 4 次元多様体の可縮な開部分集合上の微分構造は、4 次元微分位相幾何学において本質的な役割を果たしており、その構造の解析は極めて重要な問題である。それにもかかわらず、たとえばそこにどのような完備リーマン計量を許容するか、これまでほとんど理解されてこなかった。

(5) $K3$ 曲面上の $exotic R^4$ を与える可縮な開部分集合上の微分構造に対して、ある種の性質を満たすものが存在し得ないことを示すことに成功した。特にその手法は、 $K3$ 上のサイバーク・ウィッテンモジュライ空間を変形することを行う。通常とは異なり、ここでの手法は非コンパクト空間上でのモジュライ理論の構成を必要とはせずに、極限に現れる完備リーマン計量に関する L^2 自己双対調和微分形式の非存在性を用いるような、線型理論に帰着されることであり、そのような手法は過去には存在していない初めてのものである。この手法は、グロモフによるケーラー双曲多様体に対する Singer 予想の解決手法に触発されたものである。特に、コンパクト 4 次元多様体に埋め込まれた開集合上に完備リーマン計量を与えた時に、その計量に関する L^2 調和形式が無限遠で L^2 完全であるようなものの非存在が、元のコンパクト多様体上のサイバーク・ウィッテン不変量が自明ではないことと深く関わっていることを明らかにした。これを応用することで、互いに位相同型である可微分 4 次元非コンパクト多様体の対で、一方には L^2 調和形式が無限遠で L^2 完全であるようなものが存在する完備リーマン計量を許容するが、もう一方にはそのようなものが存在しない例を与えた。ただしこれには付加的な条件も課しているため、今後はその余分な条件を取り除くことが課題となる。

基本群が可換な場合には、被覆モノポール写像は、族のモノポール写像として解釈される。その方向性に関する研究を行なった。これは Baraglia-Konno が導入した族のサイバーク・ウィッテン理論を応用したものである。

(6) 今野北斗・中村信裕氏との共同研究により、ファイバー束の微分構造に関して次の決定的な例を与えた。コンパクト 4 次元多様体をファイバーにもつコンパクトなファイバー束であり、ファイバー空間、基底空間、全空間はすべて微分可能多様体であるような位相的ファイバー束であり、かつファイバー束としては微分可能ではない。全空間がコンパクトな場合、次元の条件を除いたとしてもこのような例はこれまでは知られていなかった。

(7) サイバーク・ウィッテン理論は 4 次元微分トポロジーに決定的な進展を与えた。特にサイバーク・ウィッテン不変量が非ゼロである場合に、元の 4 次元多様体の可微分構造について大きな情報を得ることができる。シンプルタイプ予想とは、サイバーク・ウィッテン不

変量が非ゼロであるのはモジュライ空間が 0 次元の時のみということを主張し、現在までも未解決問題である。中村信裕氏・安井弘一氏との共同研究により、mod 2 版のシンプルタイプ予想を導入し、それについてある種の条件のもとではその予想が成立することを示した。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計15件（うち査読付論文 11件 / うち国際共著 3件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 T. Kato, D. Kishimoto, M. Tsutaya	4. 巻 1
2. 論文標題 Homotopy types of spaces of finite propagation unitary operators on Z	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Homotopy, homology and applications (accepted)	6. 最初と最後の頁 1-22
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 T. Kato, H. Sasahira, H. Wang	4. 巻 1
2. 論文標題 Twisted Donaldson invariants	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society	6. 最初と最後の頁 1-52
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1017/S0305004121000013	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 T. Kato, N. Nakamura, K. Yasui	4. 巻 1
2. 論文標題 The simple type conjecture for mod 2 Seiberg-Witten invariants	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of the European Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 1-8
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4171/JEMS/1297	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 T. Kato, N. Nakamura, H. Konno	4. 巻 1
2. 論文標題 A note on exotic families of 4-manifolds	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Peoceedings of AMS	6. 最初と最後の頁 1-11
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Tsuyoshi Kato, Daisuke Kishimoto, Mitsunobu Tsutaya	4. 巻 1
2. 論文標題 Homotopy type of the unitary group of the uniform Roe algebra on Z^n	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Topology and Analysis	6. 最初と最後の頁 1-15
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.48550/arXiv.2102.00606	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Tsuyoshi Kato	4. 巻 15
2. 論文標題 L2 harmonic forms and the Seiberg-Witten map on non compact four manifolds	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Gokova Geometry and Topology	6. 最初と最後の頁 1-22
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 T. Kato, H. Sasahira and H. Wang	4. 巻 1807.08239
2. 論文標題 Higher Nahm transform in non commutative geometry	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 arXiv	6. 最初と最後の頁 1 - 26
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Tsuyoshi Kato	4. 巻 15(4)
2. 論文標題 Induced map on K theory for certain \mathbb{Z} -equivariant maps between Hilbert spaces	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of noncommutative geometry	6. 最初と最後の頁 1433-1467
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4171/JNCG/442	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Tsuyoshi Kato	4. 巻 15(3)
2. 論文標題 Covering-monopole map and higher degree in non-commutative geometry	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of noncommutative geometry	6. 最初と最後の頁 995-1071
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4171/JNCG/430	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 D.Croydon, T.Kato, M.Sasada, S.Tsujimoto	4. 巻 1
2. 論文標題 DYNAMICS OF THE BOX-BALL SYSTEM WITH RANDOM INITIAL CONDITIONS VIA PITMAN ' S TRANSFORMATION	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Memoir of AMS	6. 最初と最後の頁 1-89
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1090/memo/1398	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 T. Kato, N. Nakamura, H. Konno	4. 巻 157(4)
2. 論文標題 Rigidity of the mod 2 families Seiberg-Witten invariants and topology of families of spin 4-manifolds	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Compositio Mathematica	6. 最初と最後の頁 770-808
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1112/S0010437X2000771X	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 T. Kato, D. Kishimoto, M. Tsutaya	4. 巻 1
2. 論文標題 Hilbert bundles with ends	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Topology and Analysis	6. 最初と最後の頁 1-32
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1142/s1793525321500680	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 T.Kato, D.Takata	4. 巻 2201.07492
2. 論文標題 Seiberg-Witten theory on finite covering spaces of spin 4-manifolds	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 arXiv	6. 最初と最後の頁 1-15
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 T. Kato, D. Kishimoto, M. Tsutaya	4. 巻 2211(00512)
2. 論文標題 Vector fields on non-compact manifolds	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 arXiv	6. 最初と最後の頁 1-11
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 T. Kato, N. Nakamura, K. Yasui	4. 巻 2111(15201)
2. 論文標題 Upper bounds for virtual dimensions of Seiberg-Witten moduli spaces	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 arXiv	6. 最初と最後の頁 1-20
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計12件 (うち招待講演 11件 / うち国際学会 8件)

1. 発表者名 T. Kato
2. 発表標題 Higher Nahm transform in non commutative geometry
3. 学会等名 2018 Spring operator algebra program at ECNU (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 T. Kato
2. 発表標題 Higher Nahm transform in non commutative geometry
3. 学会等名 Workshop on Noncommutative Geometry and Representation Theory/四川大学 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 T. Kato
2. 発表標題 Twisted Donaldson invariant
3. 学会等名 Colloquium talk at University of New South Wales (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 t. Kato
2. 発表標題 Twisted Donaldson invariant
3. 学会等名 Gauge Theory and Applications at Regensburg (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 T. Kato
2. 発表標題 Non commutative geometry and gauge theory
3. 学会等名 Geometry, Analysis, Groups at Euler Institute, St Petersburg (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Tsuyoshi Kato
2. 発表標題 Twisted Donaldson invariant
3. 学会等名 Non commutative geometry seminar at Pennsylvania State University (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Tsuyoshi Kato
2. 発表標題 Twisted Donaldson invariant
3. 学会等名 Topology/Geometry lectures at Seoul National Univ (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Tsuyoshi Kato
2. 発表標題 Twisted Donaldson invariant
3. 学会等名 Gauge theory in Fukuoka (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Tsuyoshi Kato
2. 発表標題 A rigidity theorem of the \mathbb{Z}_2 -valued Seiberg-Witten invariants for spin families
3. 学会等名 Index Theory, Duality and Related Fields, Adelaide University, Australia (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 加藤 毅
2. 発表標題 Seiberg-Witten 理論周辺の応用と発展
3. 学会等名 幾何学シンポジウム (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Tsuyoshi Kato
2. 発表標題 L^2 harmonic theory and Seiberg-Witten・Bauer-Furuta theory on non-compact complete Riemannian 4-manifolds
3. 学会等名 The Eighth Pacific Rim Conference in Mathematics, Session on Differential Geometry (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Tsuyoshi Kato
2. 発表標題 L^2 harmonic theory and Seiberg-Witten, Bauer-Furuta theory on non-compact complete Riemannian 4-manifolds
3. 学会等名 SouthamptonKyoto Workshop, Southampton University, UK (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

京都大学教育研究活動データベース
<https://kyouindb.iimc.kyoto-u.ac.jp/j/cA2iC>

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究 分 担 者	上 正明	京都大学・理学研究科・教授	
	(Ue Masaaki) (80134443)	 (14301)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計4件

国際研究集会 Geometry and Everything	開催年 2019年～2019年
国際研究集会 East Asian conference on Gauge theory and related topics	開催年 2018年～2018年
国際研究集会 K theory and index theory	開催年 2018年～2018年
国際研究集会 Gauge theory in Fukuoka	開催年 2018年～2018年

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
英国	Southampton University			