

令和 4 年 5 月 27 日現在

機関番号：11301

研究種目：若手研究(A)

研究期間：2017～2020

課題番号：17H04822

研究課題名(和文) ブーゼマン非正曲率空間への固定点性質・エキスパンダーとその一般化

研究課題名(英文) Fixed point properties on Busemann Non-positively curved spaces, expanders, and generalizations

研究代表者

見村 万佐人(Masato, Mimura)

東北大学・理学研究科・准教授

研究者番号：10641962

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 5,000,000円

研究成果の概要(和文)：マーク付き有限群の無限列とその極限群の固定点性質の研究を進めた。固定点性質に関しては、ある種の代数的な条件を満たす群に対し、部分群に対する(相対的な)固定点性質から群全体の固定点性質へのアップグレードができることを証明した。特に、有限生成群の整係数群環上定義された基本行列群が強い固定点性質をもつことを示した。また、マーク付き有限群の無限列の研究からあるコンパクト群が存在し、任意の可算な剰余的有限群に対しその群を含む有限生成稠密部分群が存在することを示した。この稠密部分群は基本行列群の商群と取ることで、前半の基本行列群の結果と合わせ、強い固定点性質をもつように稠密部分群を取れる。

研究成果の学術的意義や社会的意義

Lubotzky と Weiss によって1990年代に、「与えられた無限コンパクト群の有限生成稠密部分群の離散群としての性質は、稠密部分群の取り方によってどれくらい変わりうるのか」という方向の問題が提起された。Ershov と Jaikin-Zapirain は1つの群が従順でもう一つの群が Kazhdan の性質 (T) をもつような例が構成した。本研究では群環上の基本行列群の研究を推し進めることで、Lubotzky と Weiss の問題に関して稠密部分群の群性質がさらに劇的に変わりうることを証明した。特に、(T) をもつ方の群は与えられた任意の可算な剰余的有限群を含むようにできる。

研究成果の概要(英文)：Study on marked finite groups and fixed point properties for the limit groups have been proceeded. Upgrading theorems from relative fixed point properties to the full property have been obtained. As an application, fixed point properties for elementary groups defined over integral group rings of finitely generated groups have been proved. A compact group that admits for every countable residually finite group a finitely generated dense subgroup containing an isomorphic copy of the give group has been constructed. This dense subgroup can be taken to be a group quotient of an elementary group over some group ring. Combination of these results shows that this dense subgroup can have fixed point properties on several metric spaces.

研究分野：幾何学

キーワード：固定点性質 エキスパンダー族 剰余的有限群 マーク付き群のなす空間

1. 研究開始当初の背景

固定点性質を有限生成・結合的・単位的な(可換とは限らない)環上定義された基本行列群に対し証明する、という問題意識が生まれていた。2010年に Ershov と Jaikin-Zapirain によってヒルベルト空間をターゲットとするときの結果、同値なこととして、Kazhdan の性質 (T) に関する結果が得られていた。この手法そのものを用いるとヒルベルト空間でない空間に拡張することは困難と思えた。群の部分群の構造を詳しく見ること、固定点性質を強化することができないかという背景があった。

2. 研究の目的

固定点性質の証明手法を深化させる、特に、部分群に対する相対的な固定点性質(群全体が空間に作用していたとき、その部分群による部分群作用が固定点をもつ)を組み合わせることで群全体の固定点性質を示す、という枠組みを整備することを目的とした。このような結果で典型的なものとして Helly の定理やその拡張があるが、これは作用する空間の有限次元性を本質的に用いている。ヒルベルト空間やバナッハ空間、無限次元の CAT(0) 空間など、Helly 型の定理では扱えないような状況での相対的な固定点性質のアップグレードが本題である。

また、1990年代に Lubotzky と Weiss によって「(無限)コンパクト群の有限生成稠密部分群を2つとるとき、1つが従順群でもう1つが性質 (T) をもつことはないのではないか」という問題が提起された。この問題自体は Ershov と Jaikin-Zapirain の上記結果によって否定的に解決されたが、Lubotzky と Weiss の問題は「1つのコンパクト群の有限生成稠密部分群の離散群としての性質がどれくらい変わりうるのか」というより大きな枠組みで取られることができる。従順性の方をさらに flexible(柔軟な)性質に、性質 (T) の方をさらに rigid(剛的)に、それぞれの群性質を強化することを目的の1つとした。

3. 研究の方法

部分群での相対的な固定点性質のアップグレードに関し、群の部分群の正規化部分群と全体の群での自己同型写像での像、生成する部分群に注目した。一様凸性をもつバナッハ空間に関しては距離超積 (metric ultraproduct) に関する安定性を適切なクラスでもっており、これを用いてアップグレードを行なった。相対的な固定点性質から部分群作用での固定点集合は空ではないが、アップグレードしたい部分群の列を取ったときにこの固定点集合の間のエネルギーを考え、これを最小化する組に着目する。この最小化する組が存在しない(近似的に実現する組が無遠点に逃げていく)状況、または、最小化する組が複数存在してかつその制御が効かない場合にアップグレードは困難となる。線型でない距離空間や一様凸性をもたないバナッハ空間では距離超積での制御が効きづらく、前者では作用の分類(特に、無限遠点での振る舞いから空間の作用が非消滅的であることを保証できるような空間)を用いて、後者では可分な双対バナッハ空間のときにノルムを取り替えて等長群を崩すことなく狭義凸にすることで、アップグレードの理論を進めた。

Lubotzky と Weiss の問題に関しては、任意の可算な剰余的有限群はある有限生成剰余的有限群の整係数群環上の基本行列群に部分群として埋め込むことができることを得た。これにより、固定点性質の研究とコンパクト群の有限生成稠密部分群の群性質の問題が繋がった。マーク付き有限群 (finite marked group) の収束と剰余的有限群の副有限完備化という観点から、この問題にアプローチした。

4. 研究成果

群の相対的な固定点性質のアップグレードを群構造のみの条件で公理化した。有限生成・結合的・単位的な環上で定義された基本行列群に対し、この公理化を用いることで Ershov と Jaikin-Zapirain の結果を彼らの枠組みでは到達が困難と思われる形で定性的に拡張することに成功した。特に、トレースクラス作用素のなすバナッハ空間などの一様凸性をもたないバナッハ空間や特定の条件を満たすアダマール多様体への固定点性質の研究を進めることができた。基本行列群とは限らない群に対しても、CAT(0) 立法複体に関する固定点性質のアップグレードの一般論を得ることができた。CAT(0) 立法複体はよい凸性をもっている一方、測地線の分岐が発生するため線分の平行性の概念

がうまく機能しない。その場合でも、Fernos らによる非消滅的な作用の研究を活用することで、代数的なアップグレードの枠組みを行なった。

Lubotzky と Weiss の問題の一般化に対しては、あるコンパクト群が存在して次の性質を満たすことを証明した：従順群（より強く、リュービル性をもつようにとることができる）を有限生成稠密部分群として許容する。他方、任意の可算な剰余的有限群に対し、その群を含むような基本行列群の商群を有限生成稠密部分群として含む。基本行列群の固定点性質を本研究で得ているので、Lubotzky と Weiss の問題に関して、コンパクト群の有限生成稠密部分群の群性質は広い多様性をもつことを得た。Osajda によって exact でない（同値なこととして Yu の性質 A をもたない）剰余的有限群の存在が示されており、これをこの構成に適用することで剛的な稠密部分群の方を exact でないようにすることもできる。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計4件（うち査読付論文 4件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 3件）

1. 著者名 Masato Mimura	4. 巻 100
2. 論文標題 Amenability versus non-exactness of dense subgroups of a compact group	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of the London Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 592--622
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1112/jlms.12229	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Masato Mimura and Hiroki Sako	4. 巻 7
2. 論文標題 Group approximation in Cayley topology and coarse geometry, Part II: Fibred coarse embeddings	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Analysis and Geometry in Metric Spaces	6. 最初と最後の頁 62--108
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1515/agms-2019-0005	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 M.Mimura	4. 巻 20
2. 論文標題 Superrigidity from Chevalley groups into acylindrically hyperbolic groups via quasi-cocycles	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Journal of the European Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 103-117
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.4171/JEMS/760	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Masato Mimura and Hiroki Sako	4. 巻 13
2. 論文標題 Group approximation in Cayley topology and coarse geometry Part I: Coarse embeddings of amenable groups	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Topology and Analysis	6. 最初と最後の頁 1-47
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1142/S1793525320500089	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

〔学会発表〕 計11件（うち招待講演 9件 / うち国際学会 6件）

1. 発表者名 Masato Mimura
2. 発表標題 An extreme counterexample to the Lubotzky--Weiss conjecture
3. 学会等名 Rigidity (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Masato Mimura
2. 発表標題 Upgrading relative fixed points
3. 学会等名 Beyond Spectral Gaps (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 見村万佐人
2. 発表標題 離散群からエクスペンダーグラフを作る (1)
3. 学会等名 Summer School 数理物理 2019 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 見村万佐人
2. 発表標題 離散群からエクスペンダーグラフを作る (2)
3. 学会等名 Summer School 数理物理 2019 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 見村万佐人
2. 発表標題 離散群からエクスペンダーグラフを作る (3)
3. 学会等名 Summer School 数理物理 2019 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 見村万佐人
2. 発表標題 有限生成群のなす位相空間
3. 学会等名 一般位相幾何学の発展と諸分野との連携 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Masato Mimura
2. 発表標題 Profinite actions on a common set
3. 学会等名 Rigidity School final (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Masato Mimura
2. 発表標題 Upgrading fixed points
3. 学会等名 Superexpanders and Their Coarse Geometry (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 見村万佐人
2. 発表標題 ルボツキーとヴァイスの予想とその周辺
3. 学会等名 淡路島幾何学研究集会2019
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 M.Mimura
2. 発表標題 Superrigidity from Chevalley groups into acylindrically hyperbolic groups via quasi-cocycles
3. 学会等名 Besancon-Neuchatel functional analysis meeting (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 M.Mimura
2. 発表標題 BG, or not BG, that is the question
3. 学会等名 EGGS (Ergodic and Geometric Group Theory in Sendai) (国際学会)
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------