

令和元年6月11日現在

機関番号：13901

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2017～2018

課題番号：17H06738

研究課題名(和文)空間に付随する計算論的構造の不変量としての側面

研究課題名(英文)Aspects of computability-theoretic structures as topological invariants

研究代表者

木原 貴行(Takayuki, Kihara)

名古屋大学・情報学研究科・講師

研究者番号：80722701

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,100,000円

研究成果の概要(和文)：位相的観点から計算論的構造を分析することにより、計算、記述、位相の結びつきに関する膨大な数の結果を得ることができ、多数の未解決問題に解決を与えた。多くの結果は、位相空間的構造や集合論的構造に対して計算論的性質を結び付け、計算可能性理論を介して、その構造解明を与えるものである。たとえば、枚挙アルゴリズムの原理を様々な距離化不可能位相と捉えることにより、枚挙の理論を改革する統一理論を構築した。また、非可分超距離空間のボレル可測関数の連続還元次数構造に対して、非可算基数上の計算論を対応させることによって、ボレル可測関数の構造の完全解明を成し遂げた。その他、逆数学等の様々な未解決問題を解決に導いた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

計算可能性の理論は、コンピュータ科学の理論的基礎を支えるものである。本研究は、『空間』『次元』『ランダム性』といった素朴で重要な数学的構造が内部に孕む計算論的構造を明示化するという点で意義深い。また、このような発想は、逆に、非計算論的数学の概念を用いた計算論的概念の再理解にも繋がる。したがって、報告者の手法の応用範囲の拡大は、計算論と応用対象の分野双方に新たな手法と視点を持ち込むこととなり、広範な分野にインパクトを与えるものとなる。

研究成果の概要(英文)：By analyzing computability-theoretic structures from the topological viewpoint, we obtained a large number of results on the relationship among computability theory, descriptive set theory, and general topology. Most of results concern on extracting the computability theoretic nature from topological structures and set-theoretic structures, and then clarify these structures. For example, by understanding the principle of computable enumerations as some sorts of nonmetrizable topology, we established a new theory unifying the previous works on enumeration degrees. For another example, applying computability theory on uncountable cardinals, we succeeded to obtain a complete description of the bqo-valued Borel functions on nonseparable complete ultrametric spaces. Furthermore, we also solved several open problems, e.g., in reverse mathematics.

研究分野：数学基礎論

キーワード：計算可能性理論 記述集合論 逆数学 計算可能解析学 再帰理論 コルモゴロフ複雑性 位相次元論 フラクタル次元

1. 研究開始当初の背景

計算可能性理論は、前世紀中期から現在に掛けて、コンピュータ科学の勃興と並行に、目覚ましい発展を遂げた。1950年代頃より、計算可能性の理論は自然数上(デジタル)の計算論を越えて、実数や順序数、代数構造、位相空間、測度空間など様々な数学的構造上の計算論に拡張されることとなる。このような計算論の対象領域の拡大は、前世紀後期になると、解析学と物理学における計算可能性という文脈から特に注目を浴びた。近年では、確率の基礎の観点から、ランダム性とは何たるかを問う、計算論的ランダム性の研究の重要性が認識されつつある。

このような歴史的発展の中、報告者の先行研究において、一般の空間上のチューリング次数の理論を構築し、計算論とは全く無関係な文脈で現れた純粋数学の未解決問題に対してすら、計算論を応用した解決が可能であることを実証してきた。具体的には、チューリング次数のような計算論的概念を、空間の(ボレル構造等に関する)不変量として用いることによって、実解析学、記述集合論、無限次元トポロジーの様々な課題にアプローチしてきた。

この《不変量としての計算可能性構造》という観点を更に発展させることが必要であると考えていた。先行研究では、解析学的応用のために距離空間に大きな焦点を当てていたが、この枠組外にも豊穡な応用対象がある。具体的には、距離化不可能空間や測度空間上の計算可能性構造の分析手法の整備も進める必要があった。これらを用いて、位相次元、無限次元性、粗幾何、群の語の問題、記号力学系、確率、ランダム性に関する理論の背後に潜む計算論的成分を抽出し、その構造を計算論を介して理解することが可能になることが期待されていた。

2. 研究の目的

本研究の目的は、空間や次元といった素朴で重要な数学的概念が内部に孕む計算論的構造を明示化することによって、空間的概念を計算論を介して理解することである。

一年目の目的は次の通りであった：距離空間の計算可能性構造の解析を行う。真理値表次数、チューリング次数、粗次数といった計算論的ツールを利用することによって、位相次元論、無限次元トポロジー、粗次元論に現れる様々な構成のもつ計算論的成分を明らかにする。具体的には、カントール多様体や遺伝的無限次元空間などの様々な具体例に付随する計算論構造を次々に抽出し、そのようにして集めたサンプルの解析を行うことによって、空間的性質と計算論的性質の関連性を明らかにする。

二年目の目的は次の通りであった：粗次元論における計算可能性構造の分析を進める他、距離化不可能空間の計算可能性構造の解析にも取り掛かる。単なる領域理論的な位相空間のみならず、Gandy-Harrington位相やGolomb位相のような非領域理論的な距離化不可能位相も主要な対象とする。また、de Groot双対などの高階の概念も取り扱い、計算論的分析を行う。このような空間の計算論的構造を次々に抽出し、そのようにして集めたサンプルの解析を行うことによって、空間的性質と計算論的性質の関連性を明らかにする。

3. 研究の方法

本研究は、数学的な理論研究であり、特別な研究施設や設備は必要ない。本研究で行うことは、具体的な空間の計算可能性構造を次々と分析することによるサンプルの収集と、それに基づく一般論の構築である。研究計画の一部が順調に進展しない可能性に備え、積極的に共同研究を展開した。以下が、実施した共同研究の一部である。

- ・H29年6月、Antonio Montalban (UC Berkeley)氏は名古屋に短期滞在し、計算可能性理論、特にマーティン予想に関する議論を進めた。

- ・Albert Marcone氏(Udine Univ.)およびArno Pauly氏(Swansea Univ.)と共同研究を行い、算術的超限再帰の分析を行った。Arno Pauly氏は、H29年7月に名古屋を訪問している。

- ・H29年8月、Linda Brown Westrick (Univ. Connecticut)は名古屋に短期滞在し、高階関数の計算論に関する議論を行った。

- ・H30年2~3月、Vassilios Gregoriades氏(Turin Univ.)は名古屋に滞在し、記述集合論、特に凸解析集合の分離に関する議論を行った。

- ・H30年6~8月、Paul-Elliot Anglès D'Auriac氏(Université Paris-Est Créteil)は名古屋に長期滞在し、算術的超限再帰と解析選択の研究を大幅に進展させることができた。

- ・H30年10月~H31年3月、Keng Meng Ng氏(Nanyang Tech. Univ.)を長期で訪問し、負情報に基づく高階計算の理論の研究を進めた。

- ・H31年3月、Sabrina Ouazzani氏(École Polytechnique)は名古屋に短期滞在し、無限時間チューリング機械と高次計算に関する議論を行った。

4. 研究成果

一年目の研究成果は次の通りである：真理値表次数の可分距離空間への一般化の研究を行った。まず、記述集合論における Jayne-Rogers の定理を応用することによって、完備可分距離空間について、ある神託を法として等しい真理値表次数構造を持つことと第一級ポレル同型であることが同値であることを示した。また、フラクタル次元論におけるポントリャーギン-シュニレルマンの特徴付け定理の Assouad 次元への拡張を用いて、コンパクト距離空間の位相次元をコルモゴロフ複雑性によって特徴付けられることを示した。さらに、無限次元トポロジーにおける Chatyrko と E. Pol の手法を実効化し、特異点の凝縮と呼ばれる手法を用いて、2 以上の n について、 n 次元計算可能連結コンパクト距離空間の真理値表次数構造たちが万有可算上半束をなすことを示した。

その他、近年 Day-Downey-Westrick が実関数の位相的複雑性を測る順序を導入していたが、本研究では、その順序構造の決定性公理の下での完全な特徴付けを与えた。その副産物として、実関数の不連続性の指標であるブルガン階数の記述集合論的特徴付けを非コンパクト空間へ一般化した。また、その手法のもうひとつの副産物として、実関数の並行連続 Weihrauch 次数が計算可能性理論における一様 Martin 予想と関連付けられることを示した。

また、Udine 大学の Alberto Marcone 氏と Swansea 大学の Arno Pauly 氏との共同研究において、二階算術における ATR0 の Weihrauch 次数における対応物に関する研究も実施し、一様性を考慮した場合の ATR0 の振り舞いを明確にした。

二年目の研究成果は次の通りである：Pauly 氏と Ng 氏との共同研究において、計算的枚挙の構造の位相的統一理論を構築し、枚挙次数の理論の先行研究の多くは位相的観点から統一的に解釈できることを明らかにした。また、一般位相空間論において Arhangel'skii によって導入されたネットワークの概念の変種である k -ネットワークを利用することによって高階関数空間の計算論を展開できることが知られているが、Ng 氏との共同研究において、その観点を推し進め、本研究では様々な高階空間的性質の計算論的分離手法を与えた。

また、記述集合論においては、ポレル可測関数の分解問題について、Ding 氏、Semmes 氏、Zhao 氏との共同研究においてベール 2 級関数の分解に関しては完全解決を与えた。

さらに、単独の研究において、非可分超距離化可能空間上のポレル可測関数の連続還元構造に対して、「非可算基数上の計算論」を応用することによって、その組合せ論的完全不変量を与えた。任意順序数上の計算論の概念が導入可能であることは、1960 年に竹内外史によってゲーデルの構成可能宇宙の研究において導入されて以降、古くから知られていたが、本研究成果は、非可算基数上の計算論の、おそらく歴史上最初の具体的応用例を与えるものでもあると思われる。

その他、Weihrauch 束の研究においては、また、Pauly 氏と共に、凸集合選択、有限選択、ソート原理の計算論的關係を明らかにした。Angles d'Auriac 氏との共同研究では、解析的選択原理に関する問題に解決を与えた。

また、単独研究においては、逆数学の未解決問題に解決を与えた。関連して、アレクサンダー双対などの公理的分析も行った。さらに、無限次元トポロジーの逆数学的結果を用いて、関数空間の計算論においてスコット・イデアル（ペアノ算術の超準モデルの標準部分）が重要な役割を担う理由を明らかにした。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕(計 6 件)

[1] Takayuki Kihara, On a metric generalization of the tt-degrees and effective dimension theory, to appear in Journal of Symbolic Logic. doi: 10.1017/jsl.2019.18 (査読有)

[2] Takayuki Kihara, and Antonio Montalban, On the structure of the Wadge degrees of BQ0-valued Borel functions, Transactions of the American Mathematical Society 371 (11) (2019), pp. 7885-7923. (査読有)

[3] Takayuki Kihara, and Arno Pauly, Finite choice, convex choice and sorting, In Proceedings of TAMC 2019, Lecture Notes in Computer Science, 11436 (2019), pp. 378-393. (査読有)

[4] Josef Berger, Hajime Ishihara, Takayuki Kihara, and Takako Nemoto, The binary expansion and the intermediate value theorem in constructive reverse mathematics, Archive for Mathematical Logic 58 (1-2) (2019), pp. 203-217. (査読有)

[5] Takayuki Kihara, and Antonio Montalban, The uniform Martin's conjecture for many-one degrees, Transactions of the American Mathematical Society 370 (12) (2018), pp. 9025-9044. (査読有)

[6] Takayuki Kihara, Higher randomness and lim-sup forcing within and beyond

hyperarithmetic, In Sets and Computations, Lecture Notes Series, IMS, NUS 33 (2017), pp. 117-155. (査読有)

〔学会発表〕(計 15 件)

- [1] Takayuki Kihara, The Brouwer invariance theorems in reverse mathematics, The 9th International Conference on Computability Theory and Foundations of Mathematics, 2019 年 3 月 21 日 (招待講演)
- [2] Takayuki Kihara, Degrees of non-computability of points in general spaces, Thirteenth International Conference on Computability, Complexity and Randomness, 2018 年 12 月 17 日 (招待講演)
- [3] 木原貴行, BQO-Wadge theory on ultrametric spaces, Sendai Logic School 2018, 2018 年 12 月 7 日
- [4] Takayuki Kihara, Computability Theoretic Methods in Descriptive Set Theory, Symposium on Advances in Mathematical Logic 2018, 2018 年 9 月 18 日
- [5] Takayuki Kihara, Weihrauch reducibility for some 3rd order principles, Dagstuhl Seminar, Measuring the Complexity of Computational Content: From Combinatorial Problems to Analysis, 2018 年 9 月 2 日 (招待講演)
- [6] Takayuki Kihara, On the Structure of the Wadge degrees of BQO-valued Borel functions, The Logic Colloquium 2018: the 2018 annual European Summer Meeting of the Association for Symbolic Logic, 2018 年 7 月 23 日 (招待講演)
- [7] Takayuki Kihara, Weihrauch Counterparts of Reverse Mathematical Principles, The 2018 North American Annual Meeting of the Association for Symbolic Logic, 2018 年 5 月 16 日 (招待講演)
- [8] 木原貴行, The ultimate analysis of some hierarchies under AD^+ , 手形 L4 研究集会, 2018 年 3 月 26 日 (招待講演)
- [9] Takayuki Kihara, Ordinal Ranks on the Baire and non-Baire class functions, The Second Workshop on Mathematical Logic and its Applications, 2018 年 3 月 5 日
- [10] Takayuki Kihara, Topologizing the degree theory, Oberwolfach workshop on Computability Theory, 2018 年 1 月 7 日
- [11] 木原貴行, 強無限次元カントール多様体による effective forcing について, RIMS 共同研究「証明論と証明活動」 2017 年 12 月 15 日
- [12] Takayuki Kihara, Borel isomorphisms at the second level, The 2nd Pan Pacific International Conference on Topology and Applications, 2017 年 11 月 13 日
- [13] Takayuki Kihara, Wadge-like classifications of real valued functions, Aspects of Computation: in celebration of the research work of Professor Rod Downey, 2017 年 8 月 28 日 (招待講演)
- [14] Takayuki Kihara, Martin-like phenomena in the classification of real-valued functions, Fourteenth International Conference on Computability and Complexity in Analysis (CCA2017), 2017 年 7 月 24 日 (招待講演)
- [15] Takayuki Kihara, De Groot duality in computability theory, The 15th Asian Logic Conference, 2017 年 7 月 10 日

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況 (計 0 件)

取得状況 (計 0 件)

〔その他〕

ホームページ: <http://www.math.mi.i.nagoya-u.ac.jp/~kihara/index-j.html>

6 . 研究組織

- (1)研究分担者 該当なし
- (2)研究協力者 該当なし

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。