

令和元年6月24日現在

機関番号：14301

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2017～2018

課題番号：17H06783

研究課題名(和文) 高次行列因子化圏の研究

研究課題名(英文) Study of higher matrix factorizations categories

研究代表者

平野 雄貴 (Hirano, Yuki)

京都大学・理学研究科・助教

研究者番号：50804225

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,700,000円

研究成果の概要(和文)：大内氏と共同で、ある種の多項式の和に付随する次数付き行列因子化の圏の半直交分解について研究し、その応用として、可逆多項式と呼ばれる多項式とその転置の間の圏論的ミラー対称性予想から従うある予想を部分的に証明した。既約な可逆多項式には鎖型とループ型の2種類があるが、本研究では鎖型の場合に、可逆多項式の極大次数付き行列因子化の圏が充満例外生成列と呼ばれる良い生成系を持ち、その長さをもととの可逆多項式の転置のミルナー数に等しいことを証明した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

これまでは共通の変数を共有しないような2つの多項式の和で表される多項式の行列因子化の圏に関する結果しか知られていなかったが、本研究により変数を共有するような多項式の和で表されるような多項式の場合にも、その行列因子化の圏が良い分解を持つことが分かった。またその応用として得た鎖型の可逆多項式の行列因子化の圏が充満例外生成列を持つという結果は、これまで3変数以下の場合までしか知られていなかったものであり、圏論的ミラー対称性予想を支持するための新たな根拠を与えるものである。

研究成果の概要(英文)：This is a joint work with Ouchi. We prove that the category of graded matrix factorizations of non-Thom--Sebastiani-type sum of certain polynomials has a semi-orthogonal decomposition, and as an application, we partially resolve a conjecture that is implied by categorical mirror symmetry conjecture between an invertible polynomial and its transpose. More precisely, we show that the category of maximally graded matrix factorizations of invertible polynomials of chain type has a full exceptional collection whose length equals to the Milnor number of its transpose.

研究分野：代数幾何学

キーワード：行列因子化 可逆多項式

# 様式 C-19、F-19-1、Z-19、CK-19(共通)

## 1. 研究開始当初の背景

特異点を持つ多様体に対して、その上の接続層の導来圏を perfect 複体のなす部分三角圏で割った圏を特異点圏と呼ぶ。特異点圏は多様体の特異点の情報を反映した圏であると考えられているため、特異点圏から多様体の特異点の情報を抽出できるか、というのは自然な問いである。正則なスキーム  $X$  とその上の正則関数  $W$  を考えると、組  $(X, W)$  は Landau-Ginzburg (=LG) 模型と呼ばれる。また、 $W$  のゼロスキーム  $Z$  は超曲面特異点と呼ばれ、盛んに研究されている特異点のクラスである。Buchweitz や Orlov らにより、超曲面特異点  $Z$  の特異点圏は、多様体がアフィンの場合は  $(X, W)$  の行列因子化のホモトピー圏と、一般の場合は  $(X, W)$  の導来行列因子化圏  $DMF(X, W)$  と、それぞれ同値になることが知られている。また、導来行列因子化  $DMF(X, W)$  が自然に持つテンソル構造の Balmer スペクトラムが超曲面の特異点領域と同相になることを、Yu がアフィンの場合に、研究代表者が一般の場合にそれぞれ示した。ここで、特異点圏自体は自然なテンソル構造を持たないので、特異点圏自身の Balmer スペクトラムを考えることは出来ないことに注意する。したがって、特異点に付随する Balmer スペクトラムを考える際は、特異点圏と同値な三角圏であって、自然なテンソル構造を持つような圏を考えることが必要となる。そして超曲面特異点の場合は、特異点圏と同値な三角圏及びその上のテンソル構造から、特異点に関する幾何学的情報を再構成することが可能である。

一方で、超曲面特異点の一般化である完全交叉特異点に対して、行列因子化の一般化となる高次行列因子化が Eisenbud-Peeva により近年導入された。研究代表者は、高次行列因子化を対象に持つ適切な三角圏を定めることで、完全交叉特異点の場合にも、Yu や研究代表者の結果の一般化が得られるのではないかと考えた。

## 2. 研究の目的

- (1) 完全交叉特異点を定める正則環  $R$  とその正則列  $s$  に対し、 $(R, s)$  の高次行列因子化を対象に持つ三角圏  $C$  であって、 $(R, s)$  に付随する完全交叉特異点  $R/s$  の特異点圏と同値になるようなものを構成する。
- (2) (1) で構成した三角圏  $C$  上のテンソル構造であって、その Balmer スペクトラムが完全交叉特異点の特異点領域と同相となるようなものを構成する。

## 3. 研究の方法

まず、Eisenbud-Peeva により導入された高次行列因子化のなす加法圏が自然に定まる。また、 $(R, s)$  の高次行列因子化に対し、完全交叉特異点  $R/s$  上の加群が定まる。この加群を自然に  $R/s$  の特異点圏の対象とみなすことで、高次行列因子化のなす加法圏から特異点圏へ自然な関手が構成できる。この構成は通常の行列因子化の場合の構成の一般化となるものである。この関手の射の集合の間の準同型は常に全射であることが、Eisenbud-Peeva により知られている。したがって、その射のなす空間の間の準同型の核で射の空間を割ることで、高次行列因子化を対象に持つ新たな圏が構成される。これを高次行列因子化のホモトピー圏と呼ぶことにする。この時、定義より高次行列因子化のホモトピー圏から完全交叉特異点の特異点圏への充滿忠実な関手が構成される。この関手を介して特異点圏が自然に持つシフト関手や写像錐と対応するものを、高次行列因子化のホモトピー圏において構成することを目指す。そしてこのシフト関手を用いて高次行列因子化のホモトピー圏が完全交叉特異点の特異点圏と同値になることを示す。また高次行列因子化に対し、通常の行列因子化の間のテンソル積の一般化となるようなテンソル積をうまく構成し、Yu の結果の一般化を得る。

## 4. 研究成果

行列因子化のホモトピー圏のシフト関手は非常に簡単な構成で定めることが出来るが、一般の高次行列因子化の場合は、非常に複雑な極小射影分解を考える必要があり、シフト関手が簡単な形では表せないことが分かった。これにより、高次行列因子化のホモトピー圏上に、特異点圏でのシフト関手に対応する自己同値をうまく定めることができず、期待した結果は得られなかった。また、通常の行列因子化の間のテンソル積を一般化するような高次行列因子化の間のテンソル積の構成を試みたが、うまくいかなかった。

しかしその一方で、大内氏との共同研究で当初想像していなかった結果を得た。変数を共有しない二つの多項式  $f, g$  の和は、 $f$  と  $g$  の Thom-Sebastiani 和と呼ばれ、Thom-Sebastiani 和  $f+g$  の行列因子化のなす  $dg$  圏は、 $f$  の行列因子化のなす  $dg$  圏と  $g$  の行列因子化のなす  $dg$  圏の Morita 積になることが Ballard-Favero-Katzarkov らにより知られている。しかし、Thom-Sebastiani 和でないような多項式の和の行列因子化のなす圏に関する研究はほとんど行われていなかった。研究代表者は、大内

氏との共同研究において、変数を共有するようなある種の二つの多項式  $f$  と  $g$  の和  $f+g$  の次数付き行列因子化のホモトピー圏が、 $f$  と  $g$  の次数付き行列因子化のホモトピー圏のいくつかのコピーに半直交分解することを示した。この結果は研究代表者が以前示した Knörrer の周期性に関する結果と Ballard–Favero–Katzrkov の VGIT の結果を組み合わせることで証明した。特に、この半直交分解の結果を応用し、可逆多項式  $f$  とその転置  $f^T$  との間のホモロジカルミラー対称性予想から従う予想を部分的に解決した。以下ではいくつかの用語や背景を説明した後、この予想の主張や研究代表者らによる寄与について説明する。 $n$  変数可逆多項式  $f$  とは、 $n$  個の単項式の和で表される  $n$  変数多項式であって、各単項式における各変数の指数を成分に持つような  $n$  次正方行列  $E$  が有理数体上可逆となるような多項式である。また、その転置  $f^T$  は  $E$  を転置してできる行列に対応する可逆多項式として定義される。Berglund–Hübsch らにより、可逆多項式  $f$  とその Berglund–Hübsch 転置 (=BH 転置)  $f^T$  との間にミラー対称的關係があることが見出され、高橋篤史氏により  $f$  の極大次数付き行列因子化の圏  $MF(f)$  と  $f^T$  の深谷–Seidel 圏  $FS(f^T)$  が同値であることが予想された。 $FS(f^T)$  は定義より、常に充満例外生成列と呼ばれる良い生成系を持ち、その長さ (=生成元の個数) は  $f^T$  のミルナー数に等しい。したがって高橋の予想により、 $MF(f)$  もまた、長さが  $f^T$  のミルナー数に等しい充満例外生成列を持つことが予想される。そしてこの予想は、 $f$  がチェーン型とループ型と呼ばれる 2 種類の特別な可逆多項式の場合に帰着されることが知られており、変数の個数  $n$  が 3 以下の場合には高橋や梶浦–齋藤–高橋らにより証明されている。しかし  $n$  が 4 以上の場合には、チェーン型の場合もループ型の場合も未解決であった。そして上で述べた半直交分解の応用として、 $f$  がチェーン型の場合に、この予想が任意の  $n$  について正しいことを証明した。証明では、 $n$  変数のチェーン型多項式  $f$  の極大次数付き行列因子化の圏が、 $f$  に付随する  $n-1$  変数のチェーン型多項式と  $n-2$  変数のチェーン型多項式の極大次数付き行列因子化の圏のいくつかのコピーに半直行分解することを示すことで、 $n$  に関する帰納法により証明した。これは上で述べた  $f$  とその BH 転置  $f^T$  との間の圏論的ミラー対称性予想を支持する新たな根拠を与えるものである。

## 5. 主な発表論文等

[プレプリント] (計 1 件)

- (1) Yuki Hirano and Genki Ouchi, “Derived factorization categories of non-Thom–Sebastiani-type sum of potentials”, arXiv:1809.09940.

[雑誌論文] (計 0 件)

[学会発表] (計 2 件)

- (1) Yuki Hirano and Genki Ouchi, “Derived factorization categories of non-Thom–Sebastiani-type sum of potentials”, 国際研究集会「Matrix Factorization and Mirror Symmetry」於 KIAS, 2018 年 10 月.
- (2) Yuki Hirano and Genki Ouchi, “Derived factorization categories of non-Thom–Sebastiani-type sum of potentials”, 国際研究集会「Categorical and Analytic Invariants in Algebraic Geometry VI」於 北海道大学, 2018 年 11 月.

[図書] (計 0 件)

[産業財産権]

○出願状況 (計 0 件)

名称:

発明者:

権利者:

種類:

番号:

出願年:

国内外の別:

○取得状況 (計 0 件)

名称:

発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
取得年：  
国内外の別：

〔その他〕  
ホームページ等

## 6. 研究組織

### (1) 研究分担者

研究分担者氏名：

ローマ字氏名：

所属研究機関名：

部局名：

職名：

研究者番号(8桁)：

### (2) 研究協力者

研究協力者氏名：大内 元気

ローマ字氏名：Ouchi Genki

※科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。