

令和元年8月30日現在

機関番号：14401

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2017～2018

課題番号：17H06833

研究課題名（和文）確率微分方程式と非衝突確率過程の数値解析に関する研究

研究課題名（英文）Numerical analysis for SDE and non-colliding stochastic processes

研究代表者

田口 大 (Taguchi, Dai)

大阪大学・基礎工学研究科・助教

研究者番号：70804657

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,100,000円

研究成果の概要（和文）：近年、数理ファイナンスで広く用いられているCIR過程(Cox-Ingersoll-Ross過程)やCEV過程(constant elasticity of variance過程)を、Levy過程を用いてJump型に拡張するなど、さまざまな方向に拡張する研究が行われている。これらの確率過程は、負の値を取らないなど、何らかの境界条件をもつ確率過程である。本研究の実績は、これらの確率過程と同様の境界条件を持つ離散近似を導入し、精密な誤差評価を得たことである。

研究成果の学術的意義や社会的意義

確率微分方程式に対する離散近似はEuler-Maruyama近似が広く用いられるが、対応する確率微分方程式と同様の境界条件を満たすとは限らない。本研究で得られた成果では、対応する確率微分方程式と同様の境界条件を持つ離散近似を構成することができ、近年広く研究されている境界付き確率過程に対する数値解析が可能となる。また、確率微分方程式は楕円型偏微分方程式と深い関係が知られているため、確率論を用いた数値解析（モンテカルロ法）を適用することができる。

研究成果の概要（英文）：Recently, CIR processes (Cox-Ingersoll-Ross processes) and CEV processes (constant elasticity of variance processes) are widely used in mathematical finance, and are extended in various directions, such as extending to the Jump type by using the Levy processes. These stochastic processes have some boundary conditions, such as not taking negative values or not staying at the boundary. The research achievements of this study are to introduce a discrete approximation scheme with the same boundary conditions as these stochastic processes, and provide their rate of convergence.

研究分野：確率数値解析

キーワード：確率微分方程式 CIR過程 Levy過程 Euler-Maruyama近似

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

確率微分方程式の数値計算は Euler-Maruyama 近似が最も基本的であり、広大な適用範囲がある方法として知られている。これまでの研究で、研究代表者は Hoang-Long Ngo 氏(Hanoi National University of Education)、Olivier Menoukeu Pamen 氏(University of Liverpool)との共同研究で、滑らかでない係数を持つ確率微分方程式に対する Euler-Maruyama 近似について研究し、その収束と精密な誤差評価に関する結果を得ることができた。一方で、Levy 過程によって駆動されるジャンプ型確率微分方程式、Dyson のブラウン運動に代表される非衝突確率過程は、物理学や数理ファイナンス等で広く応用されているにも関わらず、その数値解析・計算方法は未発達である。

2. 研究の目的

非衝突確率過程などの境界付き確率微分方程式に関する新たな数値計算方法を構成するとともに、これまで得られていた滑らかでない係数を持つ確率微分方程式に関する近似理論の拡張を目的とする。特に、導入した離散近似手法の精密な誤差評価を与えることを目標とする。また、非衝突確率過程の研究として、密度関数の存在と滑らかさに関する研究も行い、離散近似の問題に応用する。

3. 研究の方法

1. Levy 型確率微分方程式の離散近似に関する研究については、spectrally positive な Levy 過程によって駆動される確率微分方程式を対象に、解の一意性の証明方法を近似の誤差評価に応用する。

2. 非衝突確率過程に関する数値解析については、Implicit Euler-Maruyama 近似を導入する。その際、1 次元境界付き確率微分方程式で用いられている手法を非衝突確率過程にまで拡張する。

3. 確率微分方程式の境界条件の一つに、「non-sticky boundary」という条件があり、「確率過程が境界には滞在しない」という形で定式化される。これらの確率過程に対して、「occupation time formula」と呼ばれる「local time」に関する公式と Skorokhod が確率微分方程式の解の構成に適用した tightness に関する手法を適用することで、確率微分方程式の係数が滑らかでないという問題点を解消する。

4. 非衝突確率過程の密度関数の存在と滑らかさについては、Malliavin calculus における Wiener 汎関数の局所非退化性に関する手法を用いる。その際、確率過程に対する負のモーメントの評価を用いる必要があるが、これに関しては Girsanov の定理に基づく評価方法を適用する。

4. 研究成果

近年、数理ファイナンスで広く用いられている CIR 過程(Cox-Ingersoll-Ross 過)や CEV 過程(constant elasticity of variance 過程)をさまざまな方向に拡張する研究が行われている。その一つとして、CIR 過程を Levy 過程を用いて、Jump 型の方程式に拡張するという研究が盛んに行われている。特に(Jump 型) CIR 過程は負の値にはならないという性質があるが、確率微分方程式の離散近似でよく用いられる Euler-Maruyama 近似には、その性質はなく負の値をとる可能性がある。そこで、Li Libo 氏との共同研究において、正の値を保った離散近似手法として、implicit Euler-Maruyama 近似を構成し、その誤差評価を行った。本研究の結果は、BIT Numerical Mathematics に掲載が決定している。

また、CEV 過程の拡張として、free boundary CEV 過程が研究されている。特に、この確率過程の拡散係数のヘルダー連続性が $1/2$ よりも真に小さいという場合に対しては、何らかの意味で境界条件を付け加えなければ、解の一意性を保証することができない。これまで、上に挙げた「non-sticky boundary」を境界条件にもつ確率微分方程式は、その係数が「滑らかでない」という条件があるため、離散近似に関する研究は行われていなかった。そこで、田中章博氏との共同研究において、Euler-Maruyama 近似もまた「non-sticky boundary」を満たすことを証明し、その弱収束と強収束に関する結果を得た。本研究の結果は、学術雑誌に投稿済みである。(Dai Taguchi and Akihiro Tanaka, "On the Euler-Maruyama scheme for degenerate stochastic differential equations with non-sticky boundary condition", arXiv:1902.05712.)

Malliavin calculus を用いた確率微分方程式の解の密度関数に関する研究は、これまで広く研究されているが、非衝突確率過程などに対しては、これまで適用されてはいなかった。そこで、永沼伸顕氏との共同研究において、これらの確率過程に対する負のモーメントの評価を適用し、Wiener 汎関数の局所非退化性を用いて、密度関数の存在と滑らかさを証明した。本研究の結果は、学術雑誌に投稿済みである。(Nobuaki Naganuma and Dai Taguchi: "Malliavin Calculus for Non-colliding Particle Systems", arXiv:1803.04136.)

5. 主な発表論文等

Libo Li and Dai Taguchi, On the Euler-Maruyama scheme for spectrally one-sided Lévy driven SDEs with Hölder continuous coefficients, Statistics & Probability Letters, Volume

146, 2019, 5-26.

Libo Li and Dai Taguchi, On a positivity preserving numerical scheme for jump-extended CIR process: the alpha-stable case, BIT Numerical Mathematics に掲載決定済み。

〔雑誌論文〕(計 2 件)

〔学会発表〕(計 6 件)

〔図書〕(計 件)

〔産業財産権〕
出願状況(計 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年：
国内外の別：

取得状況(計 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究分担者

研究分担者氏名：

ローマ字氏名：

所属研究機関名：

部局名：

職名：

研究者番号(8桁)：

(2) 研究協力者

研究協力者氏名：Libo Li

ローマ字氏名：Libo Li

研究協力者氏名：Hoang-Long Ngo

ローマ字氏名：Hoang-Long Ngo

研究協力者氏名：永沼 伸顕

ローマ字氏名：Nobuaki Naganuma

研究協力者氏名：田中章博

ローマ字氏名：Akihiro Tanaka

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。