様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　元 年　 ６ 月 １２ 日現在

機関番号：３２６１３
研究種目：研究活動スタート支援
研究期間：2017～2018
課題番号：１７Ｈ０７０９２

研究課題名（和文）Bergman核と正則自己同型群およびその応用に関する研究

研究課題名（英文）Bergman kernel, holomorphic automorphism groups and their applications

研究代表者
山盛　厚伺（Yamamori, Atsushi）

工学院大学・工学部・講師

研究者番号：８０８０７５１１

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　1,400,000円

研究成果の概要（和文）：準円型領域における正則自己同型群の等方部分群について研究を行なった．Kaupによりこの群に属する元は多項式写像となることが知られていたが，本研究ではこの写像の形を分類することを目的とした．既に2次元の場合に分類が出来ており，それから導かれる仮説が実際に，3次元の場合に成立していることを証明した．具体的には，Bergman写像が多項式写像となること．またこの写像は逆写像も含めて計算可能であることを証明した．

研究成果の学術的意義や社会的意義
多変数函数論はカルタンやポアンカレの時代から続く歴史の長い研究分野である．これまで多くの研究がなされてきたが，複素解析で考察の対象となる正則関数は局所的制約が大域的振る舞いにも影響を及ぼす．特に対称性が高い領域では対称性の中心での制約条件が正則自己同型写像の形を線形写像の様な限られたものにするという現象も起こる．円型領域という回転で形が変わらない領域のクラスがあるが，本研究では対称性の度合いがこれより低い準円型領域を考察した． 特に原点を固定するという局所的条件の下で正則自己同型写像の形を分類することを目標とし，研究計画時に立てた仮説が3次元の場合で成立していることを証明した．

研究成果の概要（英文）：In this research project, we studied the isotropy subgroups of quasi-circular domains. It was known by Kaup that every element of the isotropy subgroup is a polynomial mapping. Our plan is to classify this polynomial mappings. In the previous research, we already obtained a classification for two-dimensional cases and we have a hypothesis for higher-dimensional cases. We proved that this hypothesis is true for three dimensional cases. More specifically, we showed that the Bergman mapping is a biholomorphic polynomial mapping. Moreover, forms of the Bergman mapping and its inverse are calculated explicitly.

研究分野：多変数函数論

キーワード：ベルグマン核　正則自己同型群　準円型領域　特殊領域　非有界領域　ベルグマン写像　代表領域　等方部分群

１．研究開始当初の背景

数学の様々な分野で対象 X, Y が同型かどうかを決定する「同型問題」は重要である．本問題を調査する上で「不変量を調べる」ことは最も基本的な方法である．多変数複素解析学では「複素領域 X, Y における双正則不変量」が考察される．本研究では，２つの不変量「Bergman 核・正則自己同型群」についての研究を行った．

当該分野では領域に「有界性」を課すことで，種々の有用な性質が保証される．例えば，有界領域の Bergman 核は常に非自明であり正則自己同型群 Aut(D)は有限次元 Lie 群の構造を持つ．一方，非有界の場合ではこれらは一般に成立せず，これが非有界領域の研究を困難にしている一因であるといえる．また同型問題や正則自己同型群の研究では，領域がある種の良い対称性を持つ場合には，有用な結果が得られているが対称性を弱める程，問題は難化する．例えば「良い対称性」をもつ複素領域のクラスとしては回転写像で不変な領域である円型領域が挙げられる．例えばこの領域は単位球などの重要な例を含む．

以上が当該分野の有界性・非有界性および対称性にまつわる状況である．このような状況を踏まえ研究代表者山盛厚伺は次の問いを深く理解することを遠望している：

(1) 有界性や円型性などの「良い条件」下で知られている定理は ，仮定を弱めると結論はいかに変化するのか?

そして，これは本研究課題において核心をなす「問い」でもある．この種の問題は特定の定理に限っても非自明な問いであり，研究方法も考察する定理に応じて適切なものを選択する必要があり，場合によっては手法自体を新たに構築する必要もあると予期される．

２．研究の目的

本研究の目的は大きく分けて (2)，(4) に分かれる．以下それについて記述する．

(2) 等方部分群の構造の解明

上記(1)で言及した問いを踏まえ，研究目的(2)では円型性より弱い対称性を持つ複素領域を考察する．特に，これまでの研究により有用性が判明している Bergman 幾何的な手法を用いて次について知見を得ることを研究目的とする：

(3) 準円形領域の正則自己同型群の重要な部分群である等方部分群現れる写像を分類する．

これには Kaup の定理「有界準円型領域 D の等方部分群の元は多項式写像である」が先行研究としてある．研究代表者山盛厚伺と Liyou Zhang 氏の共同研究で D が C^2 内の準円形領域である場合の分類は既に完成し，特殊な形をした多項式写像しか現れないことを発見し，その形の分類も行った．これにより，高次元でも等方部分群に現れうる写像に任意性はなく特殊な形の多項式写像しか現れないだろう，という仮説が立てられる．なお上記の共同研究では，2 次元での特殊事情を使っている箇所があり，その高次元化は非自明である．

次に，非有界領域上の複素解析学のより深い理解を目指すための研究目的について述べる．数学の様々な分野で具体的記述が困難な不変量が存在するが，Bergman 核・正則自己同型群もその種の不変量である．従い，これらが共に記述できる複素領域は特別な意味を持つ．例えば不等式$|w|^2<e^{-|z|^2}$で定義される C^{n+m} 内の領域 $D_{n,m}$ は，研究代表者の研究によりその様な例となることが判明した．特に非有界領域に限定すると，そのような例は稀有であり，この例は当該分野にとって注目すべき対象である．本研究ではこのような背景のもとで次の点を明らかにすることが目的である：

(4) 有界領域で知られている諸定理（またはその類似）が $D_{n,m}$ にて成立するか否か．

有界領域では単位球などの非コンパクトな Aut(D)(　D を復元できる程に大きい)を持つ種々の領域に対し，特徴付けの研究が成された．研究代表者のこれまでの研究により Aut($D_{n,m}$)も非コンパクトであることが判明している．この領域について主要な研究目的は(4)とくに Aut($D_{n,m}$)に関わるものについて研究することである．

３．研究の方法

上記の目的を達成するため，関連する分野に関する研究集会等に出席したり，研究成果を発表することが必要不可欠であった．そのために本科研費を活用した．例えば

- Analysis and CR geometry (Erwin Schrodinger International Institute，ウィーン，2018 年 12 月)

に参加することで関連分野の研究者と議論する機会が設けられたことは，研究遂行上有益であった．また東京大学にて行われている複素解析幾何セミナーではおおよそ毎週研究者を招きセミナーを行っており，本研究と関わりの深い講演があるときには出席して情報収集を行った．具体的な研究の方法は以下に述べるとおりである．

準円形領域の正則自己同型群の等方部分群にあらわれるのは多項式写像のみであることは既に上で述べたように既知であった．さらにこれ以上の情報を得るために本研究では Bergman 核を用いた方法を用いる．実際既に 2 次元のケースにおいては，そのような方法を使い，研究代表者山盛厚伺とその共同研究者 Liyou Zhang により現れる多項式写像の分類が出来ている．研究の方針として，2 次元のときの議論から導かれた次の仮説を確かめることを主目的とした．

- Bergman 核から定義される Bergman 写像は双正則な多項式写像であり，その形に任意性は無く特別な多項式写像しか現れず，その形は分類可能である．また逆写像の形も計算可能である．

Bergman 写像の性質から準円形領域の等方部分群の任意の元が Bergman 写像とその逆写像および，ユニタリ写像の合成として記述されることが導かれる．従い，上記仮説が肯定的に解決されれることは，等方部分群を調べるにあたり重要なことである．
一方 $D_{n,m}$ については，児玉秋雄氏が正則自己同型群に関連する論文を，本研究実施時に発表したため，その手法、結果について精査を行い，一般化，証明の簡易化，類似の結果の導出など様々な可能性を想定し多角的な研究を行った．

４．研究成果

2 次元の場合には準円形領域のウェイトを固定すると，等方部分群の元に現れる多項式写像の次数は 3 通りの可能性しかない．一方，具体例による考察により，高次元ではウェイトを固定しても，次数の可能性は無限通りとなりえることが判明した．このような状況を考慮して，まず 3 次元での考察を行い，手がかりを得ることとした．その結果

- 3 次元の準円形領域に対する Bergman 写像が多項式写像となること，およびその形の決定，
- さらに Bergman 写像は双正則写像であり，逆写像の形も計算可能，

となっていることを見出し，上述の仮説を確認することができた．
また，これにより Bergman 写像の形の分類ができたが，実際にそのような Bergman 写像を持つような準円形領域の存在についても具体例を構成することにより，示すことができた．これらの結果を合わせることで，3 次元の場合に等方部分群の元が一般にどのような形をしているか，という所までは判明した．その一方，等方部分群の元を Bergman 写像とユニタリ行列 T を用いて合成する際に，行列 T のどの場所に零成分が入っているかにより合成後の形は大きく変わり，従って多項式写像の次数についても大きく変わる．2，3 次元までならば，全ての場合を総当たりして行くことができると思われるが，高次元への一般化を視野にいれると，零成分の位置と合成後の次数の関係について総当たりによらない上手い方法を見つける必要がある．これについては，本稿執筆時点では上手い方法は見つかっていないため，今後の課題である．
非有界領域 $D_{n,m}$ については，上記の零成分の位置に関連する文献などの調査や後述の新しく派生した研究に多くの時間を割いたため，児玉氏による論文の調査と $D_{n,m}$ と多くの類似点がこれまでに観察されている Thullen 領域に関係する文献の調査をするに留まり，具体的な新しい成果は，上げることが出来なかった．
以上が研究当初に計画していたものに関連する研究成果である．当初研究計画には含まれていないが，上記の研究を行う内に派生した研究もあり，それに関する成果を以下述べる．
Bergman 核は，領域にある種の対称性があると，「底空間」における重み付き Bergman 核を用いた無限和として記述される．Boas，Fu，Straube らは 1999 年に Deflation 恒等式と呼ばれる Bergman 核についての関係式を発見した．また類似の Deflation 型恒等式を 2017 年に Beberok が発見した．今回，Roos 領域と呼ばれる複素領域のクラスを新しく導入し，この Roos 領域の Bergman 核が重み付き Bergman 核を用いた無限和による表示を持つことを証明した．この表示を応用して，Roos 領域において 2 種類の Deflation 型恒等式が成立することを示すことに成功した．特に，Roos 領域は，Boas-Fu-Straube，Beberok の考察した複素領域を含み，更に得られた Deflation 型恒等式は先行研究によるものを全て特別な場合に含むことも判明した．この結果については，論文を投稿中であり，また 2019 年 3 月に開催された日本数学会年会の函数論分科会一般講演にてこの成果を発表した．
次にもう一つ派生した研究があるのでそれについて述べる．本研究では，Bergman 核から定義される Bergman 写像を用いて，等方部分群の研究を行うことが主目的の一つであった．今回，Bergman 核から新たにある種の双正則不変な集合を定義した．この不変集合を導入した動機は 2015 年の研究代表者による結果の非等質領域への一般化にある．2015 年に単位球と 2 重円盤の正則非同値性を Bergman 核から定義される不変な関数と Bergman 核の明示的表示から示した．単位球と 2 重円盤はどちらも等質領域であるのでこの領域上の不変な関数は定数のみである．この事実と領域の等質性より，非同値性の証明は定数の比較によりなされる．一方，非等質領域では不変な関数は定数関数になるとは限らないため，この議論の直接的な一般化は出来ない．しかし，上述の不変な集合を用いることで，ある種の対称性を持った複素領域であれば，等質領域の場合のように，定数比較で非同値性が導かれることを発見した．また実際に幾つかの非等質ラインハルト領域の例で非同値性を示すことにも成功した．これについては，福岡複素解析シンポジウム，Mini-workshop on Several Complex Variables， 静岡複素解析幾何セミナーにてその成果を発表した．これについてはまだ不明な点も多く，今後も引き続き研究を継続していく必要があると思われる．

５．主な発表論文等

〔学会発表〕（計 6 件）

① <u>山盛厚伺</u>，「Two variations of Boas-Fu-Straube’s deflation identity」，日本数学会函数論分科会一般講演，2019 年 3 月．
② <u>山盛厚伺</u>，「Bergman 核から定義される双正則不変な集合とその応用」，福岡複素解析シンポジウム，2019 年 3 月．
③ <u>A. Yamamori</u>，“A new holomorphic invariant and its applications”，Mini-workshop on Several Complex Variables，2018 年 11 月．

④ 山盛厚伺,「Bergmanの極小,代表領域の理論とその応用」,第61回函数論シンポジウム,2018年11月.
⑤ 山盛厚伺,「A Bergman geometric proof of Poincare's theorem and its generalization」,静岡複素解析幾何セミナー,2018年8月.
⑥ 山盛厚伺,「ある種の対称性を持つ複素領域とその正則自己同型群の等方部分群」,表現論ワークショップ,2018年1月.

〔その他〕
プレプリント
① A. Yamamori, Two variations of Boas-Fu-Straube's deflation identity, 投稿中.

ホームページ等
https://sites.google.com/site/atsyamamori

6．研究組織

※科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。