

令和元年9月11日現在

機関番号：58001

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2017～2018

課題番号：17H07321

研究課題名(和文)無限回のBianchi-Baecklund変換によるCMCトーラスの構成

研究課題名(英文)Construction of CMC tori by infinite times Bianchi-Baecklund transformations

研究代表者

緒方 勇太(Ogata, Yuta)

沖縄工業高等専門学校・総合科学科・講師

研究者番号：50800801

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,100,000円

研究成果の概要(和文)：(1)ループ群の手法を用いて「特殊なBianchi-Baecklund変換」を定式化し、新しい平均曲率一定(CMC)曲面の構成を行った。ソリトン解とは異なる性質をもつ「ポジトン型解」と呼ばれるsinh-Gordon方程式の重要な解の構成も行った。

(2)「古典的なBianchi-Baecklund変換と単純ドレッシング」の同値性を、直接的に証明する別証明を与えた。この結果により、「sinh-Gordon方程式のポジトン型解」と「ポジトン型CMC曲面のextended frame」のパラメータ関係の考察が可能となった。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究に用いている「Bianchi-Baecklund変換」は、幾何学的側面だけでなく、可積分系理論においても有名な変換であり、「ソリトン解」と呼ばれるsinh-Gordon方程式の解を与えることが既に知られている。本研究により、「ポジトン型解」と呼ばれるsinh-Gordon方程式の別の重要な解を構成し、その解析を行った。本研究は、幾何学的に興味深い曲面の構成理論を研究しているだけでなく、可積分系理論の応用例という点で学術的貢献を与えるものである。

研究成果の概要(英文)：(1) We have defined a special Bianchi-Baecklund transformation via loop group methods and constructed new examples of CMC surfaces. We have also shown a method to construct positon-like solutions which have some different properties from the famous soliton solutions for the sinh-Gordon equation.

(2) We have proved the equivalence between the classical Bianchi-Baecklund transformations and simple factor dressings directly, using a different method from previous studies. As a result, we have shown the relationship between parameters of positon-like solutions for the sinh-Gordon equation and the extended frames for positon-like CMC surfaces.

研究分野：微分幾何学

キーワード：平均曲率一定曲面 変換理論 可積分系

## 1. 研究開始当初の背景

「曲面の変換理論」の研究は古くから行われており、Baecklund は、実接線叢対応による K 曲面の変換を研究していた。のちに、Bianchi はこの手法を複素化し、「複素接線叢対応」を用いて、CMC 曲面の変換を得た。この変換は「Bianchi-Baecklund 変換」と呼ばれ、既知の CMC 曲面から 3 パラメータ族の新たな CMC 曲面を与えることが知られている。現代でも「Bianchi-Baecklund 変換」の研究は行われており、Sterling と Wente は、複数回や無限回の Bianchi-Baecklund 変換を幾何学的に考察している。また、これらの CMC 曲面は、sinh-Gordon 方程式のソリトン解と深い関係があることも知られている。

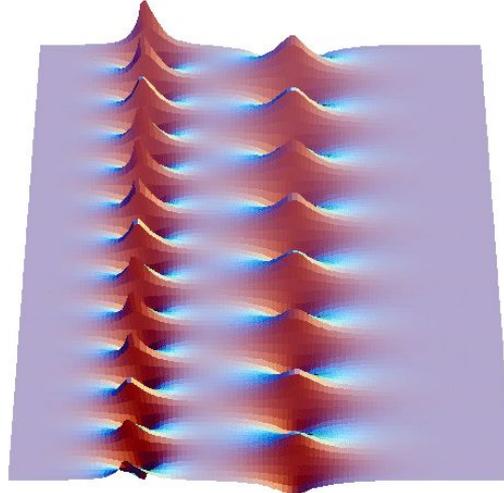


図 1. ソリトン解の一例

一方で、Darboux は、CMC 曲面より広いクラスの「双等温曲面」に対し、球叢対応による変換 (Darboux 変換) を研究していた。これらの変換については、「Bianchi-Baecklund 変換」が「CMC 曲面に制限した場合の Darboux 変換」と一致することが知られている。さらに、今日に至っては、先行研究内で Bianchi-Baecklund 変換がループ群の「単純ドレッシング」と一致するということが知られている。また、別の先行研究内では、「ゲージ理論」を使ったアプローチも紹介されており、今後さらなる発展が期待されている。

## 2. 研究の目的

本研究の目的は、CMC トーラスや一般の CMC 曲面に対して、曲面の変換理論を用いて構成法を与え、変換理論の立場から解析を行うことである。特に、古典的に性質がよく知られた変換である「Bianchi-Baecklund 変換」を複数回用いることで CMC 曲面の構成法を与えたい。

また、将来的には CMC 曲面より広い双等温曲面のクラスや (constrained) Willmore 曲面のクラスへと理論を拡張、応用し、変換理論の立場からの曲面研究を進展させたい。

## 3. 研究の方法

上述の学術的背景の中で、本研究では、特殊な Bianchi-Baecklund 変換を用いた「新しい CMC 曲面の構成」を目標とした。この特殊な Bianchi-Baecklund 変換は、Bianchi-Baecklund 変換を「複数回」適用した場合に現れ、変換による 3 パラメータを特別に選んだ際に構成される。先行研究内で Sterling と Wente が考察していた「複数回の Bianchi-Baecklund 変換」には「ある制限」があり、彼らの研究の中で除外されてしまっていた変換である。我々は他の可積分系理論の流儀に習い、この新しい曲面を「ポジトン型 CMC 曲面」、対応する sinh-Gordon 方程式の解を「ポジトン型解」と呼んでいる。このポジトン型 CMC 曲面については、我々が「ループ群の手法」により構成法を示し、幾何学的性質の研究を行った。

さらに、最終年度においては、「Bianchi-Baecklund 変換の更なる解析」を目標とした。「古典的な Bianchi-Baecklund 変換と単純ドレッシング」の同値性を、直接的に証明する別証明を与えた。同値性自体は、Inoguchi-Kobayashi、Hertrich-Jeromin-Pedit、Burstall の論文の結果から既に間接的に証明されていたが、本研究では、変換によって生じるパラメータの対応を直接的に考察し、別証明を与えた。この結果により、昨年度の研究対象であった「sinh-Gordon 方程式のポジトン型解」と「ポジトン型 CMC 曲面の extended frame」のパラメータ関係の考察が可能となった。

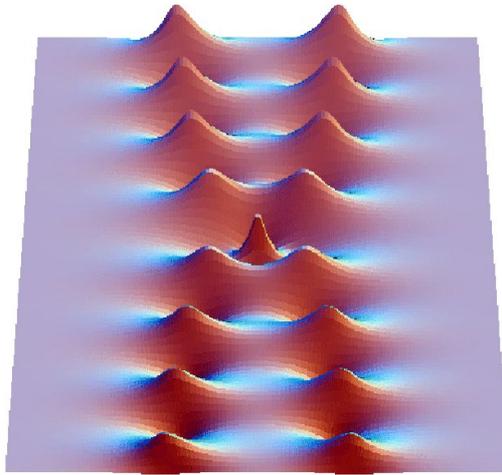


図 2 . ポジトン型解の一例

#### 4 . 研究成果

##### (1) ポジトン型 CMC 曲面の構成とその解析.

初年度は、特な Bianchi-Baecklund 変換を用いた「新しい CMC 曲面の構成」を目標とした。Bianchi-Baecklund 変換は、複素接線叢による CMC 曲面の変換として知られている。Bianchi-Baecklund 変換は、自明な CMC 曲面であっても変換後の CMC 曲面は非自明なものとなり、簡単な例から複雑な CMC 曲面を構成できる利点がある。また、この変換は幾何学だけでなく、可積分系理論においても有名な変換であり、ソリトン解と呼ばれる sinh-Gordon 方程式の重要な解を与えることが知られている。

本研究では、無限次元リー群であるループ群の手法を用いて、ある特殊なドレッシング作用を適用することで「特殊な Bianchi-Baecklund 変換」を定式化し、この変換を既知の CMC 曲面に適用し、新しい CMC 曲面の構成を行った。ソリトン解の構成において重要であった「Bianchi の可換律」を許容しない変換として、本研究の「特殊な Bianchi-Baecklund 変換」は定式化されている。また、この特殊な Bianchi-Baecklund 変換を用いることで、ソリトン解とは異なる性質をもつ「ポジトン型解」と呼ばれる sinh-Gordon 方程式の重要な解の構成も行った。例えば、sinh-Gordon 方程式のソリトン解は周期性を持つが、ポジトン型解は、周期性を持たないことを示した。ポジトン型解は、他の可積分方程式 (sinh-Gordon 方程式や KdV 方程式など) では、その解の性質がよく研究されてきたが、sinh-Gordon 方程式のポジトン型解の性質は未解明な部分が多く、今後の研究で詳しい性質を明らかにしたい。

##### (2) Bianchi-Baecklund 変換の更なる解析.

最終年度は、「Bianchi-Baecklund 変換の更なる解析」を目標とした。Bianchi-Baecklund 変換は、複素接線叢による CMC 曲面の変換であるが、一方で「球叢による CMC 曲面の変換」である Darboux 変換と一致することが知られている。近年、Darboux 変換については、CMC 曲面だけでなく、双等温曲面や Willmore 曲面などの様々な曲面のクラスに対し、ゲージ理論や平坦接続の手法を用いた研究が進められている。先行研究においては、「古典的な Bianchi-Baecklund 変換と Darboux 変換」、「Darboux 変換と単純ドレッシング」の同値性がそれぞれ別の論文内で証明されている。

本研究では、まず昨年度までの研究成果をより具体的に考察するため、「古典的な Bianchi-Baecklund 変換と単純ドレッシング」の同値性を、直接的に証明する別証明を与えた。この結果により、昨年度の研究対象であった「sinh-Gordon 方程式のポジトン型解」と「ポジトン型 CMC 曲面の extended frame」のパラメータ関係の考察が可能となった。

さらに、昨年度までの研究成果を別の手法である Darboux 変換の立場から研究し、ポジトン型 CMC 曲面の「平坦接続」や「平行ベクトル場」の存在を証明し、定式化した。この研究は、CMC 曲面より広い双等温曲面のクラスへと拡張でき、ポジトン型双等温曲面の構成にも至った。将来的には、Willmore 曲面といった別のクラスへの拡張も期待される。

当初の目標であった「CMC トーラスの構成」は本研究期間中には達成できなかったが、特殊な Bianchi-Baecklund 変換による「ポジトン型解」を構成し、新しい曲面の構成に至った。ポジトン型解の性質は未解明な部分が多く、今後も研究を続け、詳しい性質を明らかにしていきたい。

## 5 . 主な発表論文等

### [雑誌論文](計 8件)

(1) Y. Ogata, “The DPW method for constant mean curvature surfaces in 3-dimensional Lorentzian spaceforms, with application to Smyth type surfaces”, Hokkaido J. Math., vol. 46, pp315-350 (2017), 査読有り.

(2) Y. Ogata and M. Yasumoto, “Construction of discrete constant mean curvature surfaces in Riemannian spaceforms and applications”, Diff. Geom. Appl., 54 Part A, pp264-281 (2017), 査読有り.

(3) J. Cho, Y. Ogata and K. Teramoto, “Maximal Bonnet-type surfaces and Singularities”, 沖縄工業高等専門学校紀要 第12号, ISSN 1881-722X, pp81-85 (2018), 査読なし.

(4) Y. Ogata and K. Teramoto, “Duality between cuspidal butterflies and cuspidal  $S1$  singularities on maxfaces”, Note. di. Mat., 38, no. 1, pp115-130 (2018), 査読有り, DOI:10.1285/i15900932v38n1p115.

(5) J. Cho and Y. Ogata, “Deformation and singularities of maximal surfaces with planar curvature lines”, Beitr. Algebra. Geom., vol.59, 3, pp465-489 (2018), 査読有り, DOI: 10.1007/s13366-018-0399.

(6) Y. Ogata and K. Teramoto, “Constant mean curvature surfaces with  $D4$ -singularities via parallel transformation”, Adv. Stud. Pure Math., 78, pp345-363 (2018), 査読有り.

(7) M. Abe, J. Cho and Y. Ogata, “Constant mean curvature surfaces in hyperbolic 3-space with curvature lines on horospheres”, Kobe J. Math., 35, no.1-2, pp21-44 (2018), 査読有り.

(8) J. Cho and Y. Ogata, “Existence of a new Bianchi-permutability theorem for Bianchi-Baecklund transformation”, 沖縄工業高等専門学校紀要 第13号, ISSN 1881-722X, pp11-16 (2018), 査読なし.

### [学会発表](計 7件)

(1) Y. Ogata, “Maximal Bonnet-type surfaces and singularities”, The third Japanese-Spanish workshop on differential geometry (ICMAT, Spain), 2017.9.18-22.

(2) Y. Ogata, “Successive Bianchi-Baecklund transformations with single spectral parameter”, Geometry of submanifolds and integrable systems (OCAMI 研究所), 2018.3.26-30.

(3) Y. Ogata, “Constant mean curvature surfaces and positon-like solutions”, m:iv mini-workshop (Leicester University, UK), 2018.7.17.

(4) Y. Ogata, “Analysis of timelike Thomsen surface”, Mini-Workshop on Geometry and Mathematical Science (大阪市立大学), 2018.7.28-30.

(5) Y. Ogata, “平均曲率一定曲面とポジットン型解”, 日本数学会秋季総合分科会(岡山大学), 2018.9.24-25.

(6) Y. Ogata, “Existence of a new Bianchi-permutability theorem for Bianchi-Baecklund transformation”, UK-Japan Winter School 2019 “Variational problems in Geometry and Mathematical Physics” (Leeds University, UK), 2019.1.7-10.

(7) Y. Ogata, “A survey and progress of Ribaucour transformation”, The 2nd International Conference Geometry of Submanifolds and Integrable Systems (OCAMI 研究所), 2019.3.22-26.

## 6 . 研究組織

### (1)研究代表者

研究代表者氏名：緒方 勇太

ローマ字氏名：Ogata Yuta

所属研究機関名：沖縄工業高等専門学校

部局名：総合科学科

職名：講師

研究者番号(8桁): 50800801

### (2)研究協力者

研究協力者氏名：チョー ジョセフ

ローマ字氏名：Cho Joseph

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。